Zur Kettenbruchentwickelung hyperelliptischer und ähnlicher Integrale.

VON EDWARD B. VAN VLECK.

VORWORT.

Bei der Betrachtung Lamé'scher Polynome wurde Heine* zum Studium einer Darstellung der Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}}\int_\infty^x \frac{(\rho_1 x+\rho)\,dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}}$$

in der Nachbarschaft ihres Verzweigunspunktes im Unendlichen durch einen approximierenden Kettenbruch geführt; hernach wurden die hierbei hervortretenden Resultate durch ihn selbst, Heun und Humbert erweitert. In diesen Untersuchungen liegt implicit eine directe Approximation des betreffenden Integrals vermittelst algebraischer Funktionen. In der That geben die Näherungsbrüche der obigen Funktion nach Multiplication mit $\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$ eine Annäherung an das in ihr enthaltene Integral. Auf solche Weise betrachtet findet die Theorie ein tieferes Verständnis und gewinnt eine neue Bedeutung und Wichtigkeit, welche analytisch und geometrisch zu entwickeln die Absicht des Verfassers der vorliegenden Abhandlung ist. Man wird finden, dass die früher abgeleiteten Resultate nur ein kleiner Teil einer weiter reichenden Theorie sind.

Die erste Anregung zu diesen Untersuchungen erhielt der Verfasser durch Prof. Klein, der im Wintersemester 1890–91 geometrische Methoden zum Studium der linearen Differentialgleichungen entwickelte und dabei die Ansicht äusserte, es möchten ähnliche Ansätze bei Untersuchung der vorbezeichneten Kettenbruchentwickelungen nützlich sein. Ich verweise übrigens auf das unten

* Vgl. die historischen Bemerkungen des zweiten Kapitels.

folgende Kapitel III und wende mich gleich zur näheren Darlegung der hier folgenden Entwickelungen.

Im *ersten Kapitel* werden wir das Integral

$$\int \frac{W_{r-2}(x) \, . \, dx}{(x - e_1)^{1-\lambda_1} \cdots \cdots (x - e_{r+1})^{1-\lambda_{r+1}}}$$

nicht nur durch solche algebraische Funktionen näherungsweise darstellen, welche in der Nachbarschaft eines einzelnen Verzweigungspunktes approximieren, sondern auch durch solche algebraische Funktionen, die dies in der Nähe mehrerer Verzweigungspunkte zu gleicher Zeit thun. Auf diese Weise wird eine mehrfach unendliche Mannigfaltigkeit von Integralen coordiniert und verknüpft. Dabei ergiebt sich eine enge Verbindung derselben mit der modernen Theorie der Gruppen und der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Hierauf folgt im *zweiten Kapitel* ein kurzer Ueberblick uber die betreffende Literatur. Im *dritten Kapitel* wird sodann der Grund zu einer vollständig neuen, geometrischen Behandlung des Gegenstandes gelegt. Hierauf werden die Kettenbrüche, ihre Irregularitäten, die Wurzeln der in den Restintegralen auftretenden Polynome, u. s. w. geometrisch behandelt und auf diesem Wege für sie eine Reihe grossenteils neuer Sätze gefunden.

In einer späteren Abhandlung gedenke ich Riemann's Relation

$$(P^{\alpha} P_1^{\alpha_1'} - P^{\alpha'} P_1^{\alpha_1})(1 - x)^{-\bar{\gamma}} x^{-\bar{\alpha}} = F(x),$$

wo $F(x)$ eine ganze rationale Funktion bedeutet, auf P-Funktionen auszudehnen, die eine beliebige Anzahl von Verzweigungspunkten besitzen. Es wird sich dann zeigen, dass sich die Theorie unserer jetztigen Kettenbrüche gewissermassen auf einen speciellen Fall dieser Relation gründet.

KAPITEL I.

ANALYTISCHE ENTWICKELUNGEN.

(A). *Die Näherungsfunktionen.*

Es sei ein Integral

$$\int \frac{W_{r-2}(x) \, . \, dx}{(x - e_1)^{1-\lambda_1} \cdots \cdots (x - e_r)^{1-\lambda_r}}$$

gegeben, wo $e_1, \ldots . e_r, \lambda_1, \ldots . \lambda_r$ beliebige reelle oder imaginäre Werte haben sollen und wo $W_{r-2}(x)$ ein Polynom mit reellen oder imaginären Coefficienten

bedeutet, das in x von dem durch den Index angegebenen Grade ist. Wenn wir dies Integral in der Nachbarschaft eines seiner Verzweigungspunkte $e_1, \ldots . e_r, \infty$, z. B. bei e_i in eine Reihe $A_0 + A_1(x-e_i)^{\lambda_i} + A_2(x-e_i)^{\lambda_i+1} + \ldots .$ entwickeln, so werden wir sagen, dass eine Näherungsfunktion in der Nachbarschaft dieses Verzweigungspunktes dasselbe mehr oder weniger approximiert, je nachdem ihre Reihenentwickelung in der Nähe dieses Punktes in einer grösseren oder kleineren Anzahl von Gliedern mit der obigen übereinstimmt. Die Integrationsconstante A_0 werden wir gleich Null setzen, oder, wie wir lieber sagen wollen, wir werden die beiden Reihen ohne Rücksicht auf ihr constantes Glied vergleichen. Unter der *Ordnung der Annäherung* verstehen wir dann den um λ_i verminderten Exponenten der ersten Potenz von $x - e_i$, welche in dem *Reste* auftritt, d. h. in der Differenz des Integrals und der Näherungsfunktion.

Der Verzweigungspunkt ∞ spielt dabei genau dieselbe Rolle wie die e. Um die scheinbare Ausnahmestellung, die derselbe bei der allgemein gebräuchlichen Bezeichnungsweise einnimmt, auch äusserlich zu vermeiden, führen wir sogleich homogene Coordinaten ein, indem wir setzen:

$$x = \frac{ax_1' + bx_2'}{cx_1' + dx_2'}.$$

Das obige Integral verwandelt sich dadurch in eine Form nullter Dimension in x_1', x_2' oder in eine Funktion von $x' = \frac{x_1'}{x_2'}$, nämlich

$$\int \frac{W_{r-2}(x_1', x_2').(x_1'dx_2')}{(x_1' - e_1'x_2')^{1-\lambda_1} \ldots (x_1' - e_r'x_2')^{1-\lambda_r}(x_1' - e_{r+1}'x_2')^{1-\lambda_{r+1}}}$$

wo die $e_1', \ldots . e_r', e_{r+1}'$
den $e_1, \ldots . e_r, \infty$
entsprechen und wo

$$\sum_{i=1}^{i=r+1} \lambda_i = 1$$

ist. Wir werden in Zukunft die Accente weglassen und das Integral abkürzend mit $F(x)$ bezeichnen. Wenn es nötig oder wünschenswert ist, die homogene Schreibweise zu verlassen, so z. B. wenn man die Entwickelung in der Nähe nur *eines* Verzweigungspunktes sucht, wird es genügen

$$x_1 = x, \quad x_2 = 1$$

zu setzen.

Wir werden jetzt zunächst unsere Aufmerksamkeit auf die einfachsten Annäherungsfunktionen richten, nämlich die algebraischen. Man wolle sich der Allgemeinheit halber die λ als gebrochene oder gar als irrationale Zahlen denken, so dass unser Integral in der Umgebung der Verzweigungspunkte keineswegs eindeutig ist. Damit auch in einem solchen Falle unsere Definition der Approximation eine feste und bestimmte Bedeutung habe, werden wir nur solche algebraische Funktionen betrachten, die das Integral unabhängig davon approximieren, ob x irgend einen geschlossenen Umlauf in seiner Ebene macht oder nicht. Da das Integral—bei Vernachlässigung der additiven Constanten—den Faktor $e^{2i\pi\lambda_i}$ aufnimmt, wenn x einen Umlauf um e_i beschreibt, muss die algebraische Funktion bei diesem Umlauf gleichzeitig denselben Faktor aufnehmen, sich also in der Nähe von e_i verhalten wie $(x-e_i)^{\lambda_i+n}P(x-e_1)$, wo n Null oder irgend eine positive oder negative ganze Zahl ist und P eine nach ganzen positiven Potenzen von $x-e_i$ fortschreitende Reihe ist. Erinnern wir uns, dass eine Funktion eine Form von nullter Dimension ist und dass

$$\Sigma\lambda = 1,$$

so schliessen wir hieraus ohne weiteres:

PROP. I.—*Die allgemeinste algebraische Funktion, welche zwecks Approximation der Funktion $F(x)$ bei uns in Betracht kommt, hat die Form*

$$\frac{U_{q-1}(x_1, x_2)}{V_q(x_1, x_2)} \prod_{i=1}^{i=r+1} (x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i},$$

wo U_{q-1} und V_q Formen in x_1 und x_2 von den angezeigten Graden sind.

Die $2q+1$ Coefficienten in U_{q-1} und V_q stehen hier zu unserer Disposition und wir können darüber je nach der Art der gesuchten Approximation verfügen. Aus Gründen, die später hervortreten werden, wird es erwünscht sein, dass V_q beliebige positive ganzzahlige Potenzen der Binome x_1-ex_2 als Faktoren enthält, zum Beispiel die n_{r+1}^{ste} Potenz von $x_1-e_{r+1}x_2$, die n_r^{te} von $x_1-e_rx_2$, ... bis zur n_{i+1}^{sten} Potenz von $x_1-e_{i+1}x_2$. Wir wollen deshalb als allgemeinsten Ausdruck der zu betrachtenden Funktion

$$\frac{U_p(x_1, x_2)}{V_q(x_1, x_2)} (x_1-e_1x_2)^{\lambda_1} \cdots\cdots (x_1-e_ix_2)^{\lambda_i} (x_1-e_{i+1}x_2)^{\lambda_{i+1}-n_{i+1}} \cdots\cdots (x_1-e_{r+1}x_2)^{\lambda_{r+1}-n_{r+1}}$$

annehmen, wo $n_{i+1}, \ldots\ldots n_{r+1}$ *positive* ganze Zahlen sind und

$$p = q - 1 + \Sigma n.$$

Diese Funktionen werden wir in verschiedene Klassen teilen, die durch die verschiedene Wertsysteme der $n_{i+1}, \ldots . n_{r+1}$ charakterisiert sind. In jeder Klasse hat offenbar $p-q$ einen bestimmten Wert, und bei einem gegebenen Werte von q haben wir $p+q+2$ willkürliche Coefficienten zur Verfügung. Diese sind dann so zu bestimmen, dass ein Maximum der Annäherung erreicht wird. Wir werden zunächst unsere Aufmerksamkeit auf die Annäherung in einem einzelnen Verzweigungspunkte, sagen wir e_1, richten. Das bekannte Fundamentaltheorem für eine solche Annäherung wird in unserer Ausdrucksweise lauten:

Prop. II.— *Unter allen algebraischen Funktionen*

$$\frac{U_{p'}(x_1, x_2)}{V_{q'}(x_1, x_2)}(x_1-e_1x_2)^{\lambda_1} \ldots . (x_1-e_ix_2)^{\lambda_i}(x_1-e_{i+1}x_2)^{\lambda_{i+1}-n_{i+1}} \ldots . (x_1-e_{r+1}x_2)^{\lambda_{r+1}-n_{r+1}}$$

einer gegebenen Klasse, für die q' eine feste ganze Zahl q nicht überschreitet, kann man eine Funktion finden, welche unser Integral in dem betreffenden Verzweigungspunkt mehr approximiert als irgend eine andere Funktion derselben Art.

Um dies zu beweisen, setze man

$$q'=q, \quad x_1=x, \quad x_2=1$$

und bezeichne den Rest mit $R(x)$. Man betrachte dann die Gleichung:

$$V_q(x).F(x)-U_p(x).(x_1-e_1)^{\lambda_1} \ldots . (x_1-e_{r+1})^{\lambda_{r+1}-n_{r+1}}=R(x).V_q(x). \quad (1)$$

Entwickelt man beide Glieder der linken Seite nach steigenden Potenzen von $x-e_1$, so bekommt man

$$(x-e_1)^{\lambda_1}\{B_0+B_1(x-e_1)+B_2(x-e_1)^2+\ldots .\}$$
$$-(x-e_1)^{\lambda_1}\{C_0+C_1(x-e_1)+\ldots .\}=(R(x)-A_0)\,V_q(x),$$

wo die B homogene lineare Funktionen aller Coefficienten von $V_q(x)$ sind, und in ähnlicher Weise die C homogene lineare Funktionen aller Coefficienten von U_p. Um eine möglichst grosse Annäherung zu erhalten, suche man jetzt die Coefficienten so zu bestimmen, dass die Reihenentwickelung von $R(x)$ hinter dem constanten Gliede mit einer möglichst hohen Potenz von $x-e_1$ beginnt und zu diesem Zwecke setzt man

$$B_0=C_0, \ldots . B_{p+q}=C_{p+q}.$$

Diese $p+q+1$ *homogenen* Gleichungen zwischen $p+q+2$ Unbekannten können *immer* erfüllt werden. Gewöhnlich genügen sie auch, um die Coeffi-

cienten von U_p und V_q zu bestimmen. Gesetzt, dass V_q das Binom $x - e_1$ nicht selbst noch als Faktor enthält, wird in diesem Falle die Entwickelung rechter Hand mit einer Potenz von $x - e_1$ beginnen, deren Grad, allgemein zu reden, gleich $\lambda_1 + p + q + 1$ ist, aber noch grösser ausfällt, wenn zufälliger Weise noch eine Reihe aufeinanderfolgender Bedingungen $B_s = C_s$ mitbefriedigt werden. Es wird also in diesem Falle eine und nur eine algebraische Funktion innerhalb der gewünschten Grenze für q' geben, welche von der Ordnung $p + q + 1$ oder einer höheren approximiert. Wenn V_q ausnahmsweise gerade durch $x - e_1$ teilbar sein sollte, sagen wir durch $(x - e_1)^{\omega_1}$, dann müssen $B_0, \ldots . B_{\omega_1 - 1}$ alle Null werden und deshalb auch die $C_0, \ldots . C_{\omega_1 - 1}$. Infolgedessen wird dann U_p dieselbe Potenz von $x - e_1$ enthalten. Dieser gemeinsame Faktor mag jetzt entfernt werden, indem man die Polynome auf $U_{p - \omega_1}$ und $V_{q - \omega_1}$ reduciert. Die in $R(x)$ hervortretende niedrigste Potenz von $x - e_1$ zeigt zu gleicher Zeit, dass eine Annäherung von der Ordnung $p + q + 1 - \omega_1$ erreicht ist; eine Ordnung, die, wie wir beiläufig bemerken, um $\omega_1 + 1$ grösser ist als die Summe der Grade von $U_{p - \omega_1}$ und $V_{q - \omega_1}$. Es soll jetzt bewiesen werden, dass keine anderen Werte von $U_{p'}$ und $V_{q'}$ innerhalb der erlaubten Grade eine so hohe Approximation liefern werden. Seien, wenn dies möglich wäre, U', V' solche Polynome. Aus den Gleichungen

$$F - \frac{U_{p - \omega_1}}{V_{q - \omega_1}} (x - e_1)^{\lambda_1} \ldots . (x - e_{r+1})^{\lambda_{r+1} - n_{r+1}} = R,$$

$$F - \frac{U'}{V'} \quad (x - e_1)^{\lambda_1} \ldots . (x - e_{r+1})^{\lambda_{r+1} - n_{r+1}} = R',$$

leitet man die folgende ab:

$$(U_{p - \omega_1} V' - U' V_{q - \omega_1})(x_1 - e_1)^{\lambda_1} \ldots . (x - e_{r+1})^{\lambda_{r+1} - n_{r+1}} = (R' - R) V_{q - \omega_1} V'.$$

Gemäss der Voraussetzung muss nun $R' - R$ wenigstens durch $(x - e_1)^{\lambda_1 + p + q + 1 - \omega_1}$ teilbar sein und deshalb in gleicher Weise $U_{p - \omega_1} V' - U' V_{q - \omega_1}$ durch $(x - e_1)^{p + q + 1 - \omega_1}$. Dies ist aber sicher unmöglich, da es ein Polynom vom Grade $p + q - \omega_1$ oder einem noch niedrigen Grade ist. Es folgt also, dass jede Seite unserer Gleichung identisch Null sein muss; dass mithin $\frac{U'}{V'} = \frac{U_{p - \omega_1}}{V_{q - \omega_1}}$, was zu beweisen war.

Es bleibt noch der Fall zu prüfen, wo die obigen Gleichungen für die Coefficienten von U_p und V_q nicht unabhängig sind und eine einfach oder mehrfach unendliche Mannigfaltigkeit von Lösungen zulassen. Man beachte, dass die

U_p und V_q, wie sie von der einzelnen Lösung geliefert werden, keineswegs ohne gemeinsamen Faktor zu sein brauchen. Vielmehr kann man leicht zeigen, dass die hier resultierenden Lösungen alle identisch werden, sobald man in einer jeden die gemeinsamen Faktoren von U_p und V_q entfernt hat. Sei wie früher $U_{p-\omega_1}$, $V_{q-\omega_1}$ eine Lösung, deren Annäherungsordnung $p+q+1-\omega_1$ niedriger oder mindestens ebenso niedrig ist wie die einer anderen Lösung U', V'. Die Wiederholung der Schritte des letzten Paragraphen zeigt dann, dass

$$\frac{U'}{V'} = \frac{U_{p-\omega_1}}{V_{q-\omega_1}},$$

ist und auch ferner, dass kein Polynom $U_{p'}$, $V_{q'}$ innerhalb der Grenze der für q' gewünschten Grade eine grössere Annäherung liefern kann. So ist das in Prop. II ausgesprochene Theorem als ausnahmlos gültig bewiesen.

Ein wichtiges Corollar, das aus unserer Beweismethode sich ergiebt, ist folgendes: Wenn U_p und V_q ohne gemeinsamen Teiler angenommen werden, dann ist die Ordnung der Annäherung, die von der möglichst gut approximierenden Funktion erreicht wird, grösser als die Summe der Grade von U_p und V_q. Aber hauptsächlich ist die Umkehrung dieses Satzes von Nutzen:

Prop. III.—*Irgend eine algebraische Funktion*

$$\frac{U_p(x_1, x_2)}{V_q(x_1, x_2)}(x_1 - e_1x_2)^{\lambda_1} \dots (x_1 - e_{r+1}x_2)^{\lambda_{r+1} - n_{r+1}},$$

welche in der Nähe des Verzweigungspunktes e_1 von einer höheren Ordnung approximiert, als die Summe der Grade des Zählers und Nenners in dem zugehörigen $\frac{U_p}{V_q}$ angiebt, ist notwendig die bestapproximierende von allen algebraischen Funktionen derselben Klasse, bei denen der Grad von V den Wert q nicht übersteigt.

Zum Beweise ist es nur nötig zu bemerken, dass die $p+q+1$ Bedingungen auf Seite 5 *notwendig* sind, um eine so hohe Annäherung zu erreichen, während wir andererseits gerade eben gelernt haben, *dass diejenige algebraische Funktion, für welche die Coefficienten von U_p und V_q diese $p+q+1$ Bedingungen erfüllen, am besten approximiert, so lange ihr q' innerhalb der vorgeschriebenen Grenze liegt, mag nun die Ordnung der Approximation den Wert $p+q+1$ erreichen oder nicht.*

Die bestapproximierenden Funktionen einer gegebenen Klasse kann man jetzt, entsprechend den successiven ganzzahligen Werten von q, die man als

Grenzen für q' festsetzt, in eine Reihe anorden. Dabei ist aber zu beachten, dass dieselbe Funktion zu verschiedenen Werten der Grenze q gehören kann, wenn auch umgekehrt für jede Grenze q nur eine zugehörige Funktion in der betrachteten Klasse existiert. Wir haben daher zunächst die Absicht zu untersuchen, wie oft dieselbe Funktion in einer Klasse auftreten kann. Es wird dabei wünschenswert sein, U_p und V_q ohne gemeinsamen Teiler anzunehmen, was wir durch $\overline{U}_p$ und $\overline{V}_q$ andeuten werden. Bezeichnen dann p und q auch wieder die Grade der so reducierten Polynome, so haben wir den Satz:

Wenn $$\frac{\overline{U}_p(x_1, x_2)}{\overline{V}_q(x_1, x_2)}(x_1 - e_1x_2)^{\lambda_1} \ldots . (x_1 - e_{r+1}x_2)^{\lambda_{r+1} - n_{r+1}}$$

von der Ordnung $p + q + \omega_1 + 1$ *approximiert, so wird es als bestapproximierende Funktion gerade* $\omega_1 + 1$ *mal in der Klasse auftreten, nämlich für alle Grade von* V, *die zwischen* q *und* $q + \omega_1$ *inclusive liegen.*

Nach Voraussetzung werden sich bei der Substitution von $\overline{U}_p$ und $\overline{V}_q$ in die Gleichung (1) alle Potenzen von $x - e_1$ bis zur $\lambda_1 + p + q + \omega_1^{\text{ten}}$ inclusive fortheben. Multipliciert man nun $\overline{U}_p$ und $\overline{V}_q$ successive mit der 1sten, 2ten, ... ω_1^{sten} Potenz von $x - e_1$, so werden die entsprechenden Paare von Polynomen resp. die Grade $p+1$, $q+1$; $p+2$, $q+2$; .... $p+\omega_1$, $q+\omega_1$ besitzen und ihre Substitution in Gleichung (1) wird offenbar alle Potenzen von $x - e_1$ bis zur $\lambda_1 + p + q + \omega_1 + 1^{\text{sten}}$, ... $\lambda_1 + p + q + 2\omega_1^{\text{sten}}$ zum Fortfall bringen. Entsprechend der im Beweise von Prop. III hervorgehobenen Bemerkung muss deshalb ihr gemeinsamer Quotient $\frac{\overline{U}_p}{\overline{V}_q}$ zu den bestapproximierenden Funktionen gehören, für welche der Grad von V resp. die Grenzen $q+1$, $q+2$, ... $q+\omega_1$ sowie die Grenze q hat.

Was wir bisher auseinandergesetzt haben, bestand einfach darin, die gewöhnliche Methode, eine gegebene Funktion in einem ihrer nicht-singulären Punkte durch rationale Brüche zu approximieren, so zu modificieren, dass man sie auf die Verzweigungspunkte unserer Integrale anwenden kann. Dies haben wir, nicht wie Heine und andere, dadurch erreicht, dass wir zu unserem Integral einen Faktor hinzufügten, der es eindeutig macht, sondern durch die Benutzung mehrdeutiger Approximationsfunktionen. Obgleich für unsere Integrale, wie wir im Vorwort auseinandersetzten, der Unterschied in der Behandlungsweise einfach auf eine Versetzung des Faktors vom Integral zur Approximationsfunktion hinausläuft, ist die Aenderung doch von wichtigen Folgen begleitet.

Bei Heine haben wir ein einzelnes modificiertes Integral, das zu einer einzigen Klasse von approximierenden Funktionen führt. Unsere Auffassung führt dagegen *zu einer vielfachen Mannigfaltigkeit von Klassen für dasselbe vorgelegte Integral.* Diese würden nach der alten Behandlungsweise nicht coordiniert werden, insofern sie nur durch Approximation verschiedener Funktionen erhalten werden könnten.

Wir wollen jetzt den gewöhnlichen Weg ganz verlassen und unsere Aufmerksamkeit darauf richten, dass wir eine simultane Approximation in der Nachbarschaft von beliebig vielen Verzweigungspunkten $e_1, \ldots . e_i$ erhalten. Um die $p+q+2$ Coëfficienten von U_p and V_q zu bestimmen, hatten wir oben $p+q+1$ Bedingungen aufgestellt, die nötig, aber nicht immer ausreichend waren, um eine Approximation der Ordnung $p+q+1$ bei e_1 zu liefern. Anstatt nun alle diese Bedingungen anzuwenden, benutzen wir jetzt nur die ersten m_1, die wiederum notwendig sind, um mindestens eine Approximation der Ordnung m_1 zu geben. Von den noch übrigen $p+q+1-m_1$ Gleichungen für die Coefficienten wählen wir dann m_2, so dass sie die notwendigen Bedingungen für eine Approximation der Ordnung m_2 in der Nähe von e_2 liefern, und in entsprechender Weise die übrigen, bis wir $p+q+1$ Gleichungen erhalten haben. Sofern wir U und V ohne gemeinsamen Teiler wählen, wird nur eine algebraische Funktion mit diesen Bedingungen verträglich sein. Denn nehmen wir an, es gäbe zwei, deren rationale Bestandteile $\frac{U'}{V'}$ und $\frac{U''}{V''}$ sind, so kann man leicht die Gleichung ableiten:

$$(U'V''-U''V')(x_1-e_1x_2)^{\lambda_1} \ldots . (x_1-e_{r+1}x_2)^{\lambda_{r+1}-n_{r+1}} = V'V''(R''-R').$$

Entsprechend den ersten m_1 Bedingungen muss die erste Potenz, die in der nach steigenden Potenzen von $x-e_1$ fortschreitenden Reihenentwickelung rechter Hand auftritt, mindestens vom Grade λ_1+m_1 sein. Daher muss $U'V''-U''V'$ durch $(x_1-e_1x_2)^{m_1}$ teilbar sein, aus ähnlichen Gründen durch $(x_1-e_2x_2)^{m_2}, \ldots .$ oder, wenn man diese Faktoren alle zusammen nimmt, durch ein Polynom von Grade $p+q+1$. Nun ist $U'V''-U''V'$ selbst höchstens vom Grade $p+q$ und deshalb muss es identisch Null sein. Es folgt daraus $\frac{U'}{V'}=\frac{U''}{V''}$, wie zu beweisen war. Wir lernen so:

Prop. IV.— *Unter allen den approximierenden Funktionen*

$$\frac{U_{p'}(x_1, x_2)}{V_{q'}(x_1, x_2)}(x_1-e_1x_2)^{\lambda_1} \ldots . (x_1-e_ix_2)^{\lambda_i}(x_1-e_{i+1}x_2)^{\lambda_{i+1}-n_{i+1}} \ldots . (x_1-e_{r+1}x_2)^{\lambda_{r+1}-n_{r+1}}$$

in einer gegebenen Klasse, in der eine Grenze q für q' vorgeschrieben ist, ist eine einzige mit den Gleichungen verträglich, welche Approximationen der Ordnungen $m_1, m_2, \ldots . m_i$ in der Nähe der Verzweigungspunkte $e_1, e_2, \ldots . e_i$ ergeben.

Es ist wohl kaum nötig zu betonen, dass diese Gleichungen nicht immer ausreichend sind, um Approximationen von mindestens diesen Ordnungen zu liefern. Die Ordnung wird indessen, genau so wie früher, nur dann fallen, wenn V_q, wie es durch die Gleichungen bestimmt ist, Potenzen der ersten i der Binome, $x_1 - e_e x_2$, z. B. die ω_1^{ste} von $x_1 - e_1 x_2$ enthält. In diesem Falle wird die Approximation im Verzweigungspunkte e_1 sicherlich doch die Ordnung $m_1 - \omega_1$ erreichen. Zu gleicher Zeit können auch die Grade von U_p und V_q um ω_1 erniedrigt werden, wenn man sie von dem gemeinsamen Faktor $(x_1 - e_1 x_2)^{\omega_1}$ befreit. Daraus sieht man, *dass die Summe der Grade von $\overline{U}_p$ und $\overline{V}_q$ in unserer bestapproximierenden Funktion geringer sein wird als die Summe der Ordnungen der Approximationen, die sie bewirkt. Umgekehrt wird es gelten, dass irgend eine algebraische Funktion, welche eine grössere Anzahl von Approximationsbedingungen befriedigt, als die Summe der Grade der zugehörigen $\overline{U}_p$ und $\overline{V}_q$ angiebt, eine unserer bestapproximierenden Funktionen ist.*

Die Annäherungsfunktionen, welche wir augenblicklich betrachten, schliessen als specielle Fälle alle jene früher behandelten Funktionen ein, welche nur in der Nähe eines Punktes approximieren, und werden die Grundlage für unsere zukünftigen Untersuchungen bilden. Wir werden sie kurz *Approximanten* nennen. Es ist aus dem Vorhergehenden klar, dass bei irgend einer approximierenden Funktion die Kenntniss der n genügt, um die Differenz der Grade des entsprechenden U und V zu bestimmen, während die m bestimmen, wie viele Approximationsbedingungen die Polynome U und V in den einzelnen Verzweigungspunkten $e_1, \ldots . e_i$ zu befriedigen haben. Demgemäss können wir, wenn wir den Wert Null unter den Werten m und n zulassen, die früheren Resultate kurz folgendermassen resumieren:

PROP. V.—*Die Approximanten sind eindeutig bestimmt durch die Annahme der*

$$m_1, \ldots . m_i, \; n_{i+1}, \ldots . n_{r+1}.$$

Ferner ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine algebraische Funktion eine Approximante sei, die, dass sie eine grössere Anzahl von Approximationsbedingungen befriedigt, als die Summe der Grade der zugehörigen U und V angiebt.

Wir haben früher schon untersucht, wie oft eine Funktion als Approximante in einer gegebenen Klasse vorkommen kann. Das weitere Problem ist jetzt, die Methode zu finden, vermittelst derer man bestimmen kann, wann und wo dieselbe, nicht einfach in einer Klasse, sondern in der *Gesamtheit aller Klassen* vorkommen kann. Wenn zwei Approximanten gleich werden, so muss es möglich sein, jede in eine solche Gestalt zu setzen, dass sie dieselben charakterischen Zahlen m und n aufweist wie die andere. Wenn nun erstens die n in den beiden Approximanten verschieden sind, so müssen die zu der einen oder der anderen gehörigen Polynome $\overline{U}_p$ und $\overline{V}_q$ Faktoren $x_1 - e_{i+1}x_2, \ldots . x_1 - e_{r+1}x_2$ enthalten, welche mit dem irrationalen Teile so vereinigt werden können, dass die beiden Approximanten nach der Vereinigung doch dieselben Werte n aufweisen. Ist dies geschehen, so muss die Funktion von eine Gesamtordnung approximieren, die grösser ist als die um 1 vermehrte Summe der Grade der so veränderten $\overline{U}_p$ und $\overline{V}_q$. Wenn andererseits ihre n gleich sind, sind sicher ihre m ungleich. Damit dann die beiden so ausgedrückt werden können, dass auch die gleichen m auftreten, muss die eine in einem oder mehreren Verzweigungspunkten $e_1, \ldots . e_i$, mehr Bedingungen erfüllen als ihre Zahl m verlangt, nämlich so viele als die entsprechende Zahl m der anderen fordert. Es folgt daraus wieder, dass die eine von einer grösseren Gesamtordnung approximieren muss, als die um 1 vermehrte Summe der Grade von $\overline{U}_p$ und $\overline{V}_q$ angiebt. Wenn gleiche Faktoren schon von vornherein entfernt waren, wird dieses noch mehr der Fall sein. Wir werden nun sagen, dass eine Approximante *in ihrer einfachsten Gestalt* dargestellt ist, wenn ihre U_p und V_q von gemeinsamen Faktoren befreit sind und wenn überdies alle möglichen Faktoren $x_1 - ex_2$ mit dem irrationalem Teile vereinigt sind, jedoch unter der allgemeinen Beschränkung, dass die n immer ein negatives Zeichen behalten. Bei Benutzung dieser Bezeichnungsweise haben wir :

Prop. VI.—*Die Bedingung für das Auftreten gleicher Approximanten ist die, dass sie in ihrer einfachsten Form*

$$\frac{\overline{U}_p}{\overline{V}_q}(x_1 - e_1x_2)^{\lambda_1} \ldots . (x_1 - e_{r+1}x_2)^{\lambda_{r+1} - n_{r+1}}$$

ausgedrückt, von einer grösseren Gesamtordnung approximieren, als die um Eins vermehrte Summe der Grade von $\overline{U}_p$ und $\overline{V}_q$ angiebt.

Sei also jetzt eine Approximante vorgelegt, die, in ihrer einfachsten

Form ausgedrückt, den rationalen Faktor $\frac{\overline{U}_p}{\overline{V}_q}$ und die charakteristischen Zahlen $m_1, \ldots . m_i, n_{i+1}, \ldots . n_{r+1}$ besitzt, wo

$$\Sigma m = p + q + 1$$

ist. Wenn dieselbe dann von einer höheren Ordnung als der normalen approximiert, z. B. von der Ordnung $m_1 + \omega_1$ in der Nähe des Punktes e_1, so werden wir den Polynomen $\overline{U}_p$ und $\overline{V}_q$ als gemeinsamen Faktor eins von den Binomen $x_1 - e_1 x_2, \ldots . x_1 - e_{r+1} x_2$ geben. Wenn es eins von den ersten i dieser Binome ist, zum Beispiel das zweite, so werden wir ein neues

$$U_{p+1} = \overline{U}_p . (x_1 - e_2 x_2) \text{ und } V_{q+1} = \overline{V}_q . (x_1 - e_2 x_2)$$

erhalten, deren Substitution in Gleichung (1)—die indessen in Beziehung auf e_2 statt auf e_1 gebildet ist—alle Potenzen von $x - e_2$ bis zur $m_2 + 1^{\text{sten}}$ inclusive fortschaffen wird. $\frac{U_{p+1}}{V_{q+1}}$ kann deshalb, da es $m_1 + \omega_1$, $m_2 + 1$, $m_3, \ldots . m_i$ Approximationsbedingungen, im Ganzen also $p + q + \omega_1 + 2$ befriedigt, als der rationale Teil einer Approximante mit den charakteristischen Zahlen $m_1 + 1$, $m_2 + 1$, $m_3, \ldots . n_{r+1}$ betrachtet werden (Prop. IV). Hätten wir irgend ein anderes der i Binome hinzugefügt, so würde statt m_2 ein anderes von den m den Zuwachs eins erhalten haben. Wäre zum Beispiel $x_1 - e_1 x_2$ hinzugefügt, so würde m_1 einen Gesamtzuwachs von 2 erhalten haben. Wäre andererseits eins von den letzten $r - i + 1$ Binomen, z. B. $x_1 - e_{r+1} x_2$ im Zähler und Nenner hinzugefügt, dann könnte das eine, das im Zähler hinzugesetzt ist, in den irrationalen Teil der Approximante geworfen werden. Infolgedessen würde sich n_{r+1} um 1 vermindern und der rationale Teil der Approximante würde dann aus den Polynomen

$$U_p = \overline{U}_p,$$
$$V_{q+1} = \overline{V}_q . (x_1 - e_{r+1} x_2)$$

bestehen, wobei natürlich die Summe der Grade der beiden letzten Polynome um 1 kleiner ist als die Summe von $m_1 + 1$, $m_2, \ldots . m_i$. Mit anderen Worten, man kann den vorliegenden Fall so auffassen, als ob die Polynome zu der Approximante $(m_1 + 1, m_2, \ldots . n_r, n_{r+1} - 1)$ gehörten. Wäre der mit dem irrationalen Teil verbundene Faktor aus dem Nenner genommen, so würden wir eine Approximante erhalten haben, die dieselben charakteristischen Zahlen besitzt wie die beim vorigen Falle erhaltene, nur dass an Stelle der letzten die Zahl $n_{r+1} + 1$ getreten wäre.

Irgend eine der so durch Hinzufügung eines binomischen Faktors erhaltenen Approximanten befriedigt noch $\omega_1 - 1$ Bedingungen mehr, als ihre charakteristische Zahl für den Punkt e_1 verlangt. Der Process kann nun ein zweites Mal wiederholt werden, indem man ein Binom zu den neuen U und V hinzufügt, wie man es vorher mit dem $\overline{U}_p$ und $\overline{V}_q$ gethan hat. Auf diese Weise kann man den Process schliesslich ω_1-mal wiederholen und hat dann bei jedem Schritte die Wahl,

(1). *m_1 um zwei Einheiten zu vermehren,*

(2). *m_1 um eine Einheit zu vermehren und ein anderes m um den gleichen Betrag,*

(3). *m_1 um eine Einheit zu vermehren und irgend ein n um eine Einheit zu vermehren oder zu vermindern.*

Wenn im Verlaufe dieser Operationen n sich auf Null reduciert, so wird Approximation in dem entsprechenden Punkte e möglich. Nachher kann man dann, wenn man will, dies e mit unter die $e_1, \ldots e_i$ setzen.

(B). *Die verwandten Reste.*

Die Reste, welche unseren algebraischen Annäherungsfunktionen

$$\frac{U_{q-1}}{V_q} \Pi (x_1 - e_1 x_2)$$

entsprechen, d. h. die Reste, welche übrig bleiben, wenn man unsere Annäherungsfunktionen von dem gegebenen Integral abzieht, können in der Form eines Integrals ausgedrückt werden, das dem Ausgangsintegral

$$F(x) = \int \frac{W_{r-2} \cdot (x_1\, dx_2)}{\Pi (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda_i}}$$

ähnlich ist. Der allgemeine Beweis verläuft analog wie in dem speciellen Falle, den wir hier insbesondere betrachten wollen. Mögen wir uns auf die Approximante

$$\frac{U_p}{V_q} (x_1 - e_1 x_2)^{\lambda_1} \ldots (x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i} (x_1 - e_{i+1} x_2)^{\lambda_{i+1} - n_{i+1}} \ldots (x_1 - e_{r+1} x_2)^{\lambda_{r+1} - n_{r+1}}$$

beschränken. Wenn wir diese direct als eine Funktion von x ausgedrückt haben, so wird die Differentiation nach x liefern:

$$\frac{W(x)}{V_q^2 \cdot (x-e_1)^{1-\lambda_1} \dots\dots (x-e_{r+1})^{1-\lambda_{r+1}+n_{r+1}}},$$

wo $W(x)$ vom Grade $p+q+r-1$ ist, da

$$p+\Sigma\lambda-\Sigma n-q=0$$

ist. Wenn wir jetzt wieder unsere homogene Schreibweise einführen, das Integralzeichen vorsetzen und unseren Ausdruck von $F(x)$ subtrahieren, werden wir für den Rest erhalten

$$\int \frac{W_{p+q+r-1} \cdot (x_1\, dx_2)}{V_q^2 \cdot (x_1-e_1x_2)^{1-\lambda_1} \dots\dots (x_1-e_{r+1}x_2)^{1-\lambda_{r+1}+n_{r+1}}}.$$

Im allgemeinen ist nun V_q durch die Binome $x_1-e_1x_2, \dots\dots x_1-e_ix_2$ nicht teilbar, und es müssen daher die Approximationsordnungen in den i Verzweigungspunkten mindestens gleich den resp. charakteristischen Zahlen $m_1, \dots\dots m_i$ sein, deren Summe $p+q+1$ ist. Daraus folgt, dass die ersten Potenzen der Binome in den Reihenentwickelungen des Restes für die Umgebung der i Verzweigungspunkte—abgesehen von einem constanten Glied—mindestens die resp. Exponenten $\lambda_1+m_1, \dots\dots \lambda_i+m_i$ haben werden. Dies ist nur möglich, wenn $W_{p+q+r-1}$ den Ausdruck

$$(x_1-e_1x_2)^{m_1} \dots\dots (x_1-e_ix_2)^{m_i}$$

enthält. Wenn der Ausnahmefall eintritt, und V_q zum Beispiel durch die ω_1^{ste} Potenz von $x_1-e_1x_2$ teilbar ist, so braucht die Approximation nur bis zur $(m_1-\omega_1)^{\text{sten}}$ Ordnung zu steigen. Insofern dann V_q^2 das Binom in der Potenz $2\omega_1$ enthält, muss $W_{p+q+r-1}$ durch $(x_1-e_1x_2)^{m_1+\omega_1}$ teilbar sein; also durch eine Potenz, die einen um ω_1 grösseren Exponenten besitzt als im gewöhnlichen Falle. Wenn es gestattet ist, hier einen Excurs zu machen, und Späteres vorweg zu nehmen, so mag erwähnt werden, dass, wenn V_q die $\omega_{r+1}^{\text{ste}}$ Potenz von $x_1-e_{r+1}x_2$ enthält, $W_{p+q+r-1}$ dieselbe Potenz enthalten muss. Dies erkennt man leicht, wenn man den betreffenden Faktor von V_q vor der Differentiation abtrennt, in den irrationalen Teil wirft und das resultierende Integral vergleicht, mit der Form, in welcher es hier gegeben war. *Jeder von den $r+1$ binomischen Faktoren x_1-ex_2 in V_q wird dann notwendig einen neuen in $W_{p+q+r-1}$ hervorrufen.* Auf alle Fälle muss also, um diesen Excurs zu beenden, $W_{p+q+r-1}$ das Glied

$(x_1 - e_1 x_2)^{m_1} \dots (x_1 - e_i x_2)^{m_i}$ enthalten. Wirft man dann letzteres vom Zähler in den Nenner, so kommt man zu

PROP. VII.—*Die Reste haben immer die Form*

$$\int \frac{W_{r-2}.(x_1 dx_2)}{V_q^2.(x_1 - e_1 x_2)^{1-\lambda_1 - m_1} \dots (x_1 - e_{r+1} x_2)^{1-\lambda_{r+1} + n_{r+1}}}.$$

Vergleicht man jetzt die Exponenten irgend eines Restes mit denen von $F(x)$, *so wird ein Zuwachs m von λ eine Approximation in der Nähe von e anzeigen, die gewöhnlich von der Ordnung m ist, während eine Abnahme n eine Erniedrigung der Exponenten in dem irrationalen Teile der Approximante entspricht.*

Die Auswahl der ganzen Zahlen m und n unterliegt keiner Beschränkung, abgesehen davon, dass eine Approximation für mindestens einen Punkt gesucht werden muss, oder mit anderen Worten, dass mindestens ein m grösser als Null sein muss. Dies liegt auch implicit schon in der Gleichung:

$$p + q + 1 = \Sigma m.$$

Wenn man diese mit der Gleichung

$$p - q = \Sigma n - 1$$

combiniert, so kann die Bedingung so geschrieben werden:

$$\Sigma m - \Sigma n = 2q.$$

Bezeichnen wir noch die Exponenten des Integrals mit $1 - \lambda'$, so werden wir haben:

$$\Sigma \lambda' = \Sigma m - \Sigma n + \Sigma \lambda = 2q + 1.$$

Dies ist auch *a priori* klar; denn das Integral ist in Folge seiner Herstellung eine Funktion, und deshalb muss der Integrand vom $(-2)^{\text{ten}}$ Grade in x_1, x_2 sein, was die letzte Gleichung aussagt. Natürlich ist es selbstverständlich, dass die Veränderungen der Werte von λ' damit verträglich sein müssen, dass das Integral eine „Funktion" ist, und diese Bedingung hat man sich immer als erfüllt zu denken, auch wenn sie der Kürze halber auslassen.

Wir haben gelernt, dass jede Approximante vollständig durch die charakteristischen Zahlen m und n bestimmt ist. In gleicher Weise ist natürlich der Rest durch die Zahlen m und n bestimmt, und daher auch durch die λ'. So haben wir

PROP. VIII.—*Für irgend welche Werte der λ', die sich von den entsprechenden Werten λ des Fundamentalintegrals durch positive oder negative ganze Zahlen (mit*

Einschluss der Null) unterscheiden, giebt es immer einen und nur einen unter den Resten

$$\int \frac{W_{r-2}\cdot(x_1 dx_2)}{V_q^2\cdot(x_1 - e_1 x_2)^{1-\lambda_1'}\cdots\cdots(x_1 - e_{r+1}x_2)^{1-\lambda_{r+1}'}}$$

Derselbe Rest kann aber umgekehrt zu verschiedenen Wertsystemen λ' gehören. Die Reste für verschiedene Wertsysteme können nämlich zusammenfallen, wenn W_{r-2} oder V_q Faktoren haben, welche in den irrationalen Teil des Integrals gesetzt werden können. Um ein Criterium zu erhalten, wann Reste gleich sein können, gehen wir auf die Approximanten zurück. Wenn mehrere von diesen gleich waren und in ihrer einfachsten Gestalt ausgedrückt wurden, so stellten dieselben eine Approximante da, deren Gesamtapproximationsordnung grösser als die um 1 vermehrte Summe der Grade von $\overline{U}_p$ und $\overline{V}_q$ war. Umgekehrt waren auch immer Approximanten gleich, wenn dies stattfand. Nun haben wir oben gesehen, dass in dem Polynom W_{r-2} der Faktor $(x_1 - e_1 x_2)^{\omega_1}$ auftrat, wenn die Ordnung der Approximation in der Nähe des Punktes e_1 die normale um ω_1 übertraf. Wenn wir deshalb die Summe dieser Ueberschüsse in den verschiedenen Verzweigungspunkten, wo eine Approximation stattfindet, mit ω bezeichnen, so müssen ω Faktoren in W_{r-2} auftreten, welche man mit den irrationalen Teile des Nenners des Restes vereinigen kann.

PROP. IX.—*Das Criterium für das Auftreten gleicher Reste ist das, dass man das betreffende W_{r-2} auf einen niedrigen als den $(r-2)^{\text{ten}}$ Grad reducieren kann, indem man die Faktoren $x_1 - ex_2$ mit dem irrationalen Teile des Restes vereinigt.*

Die Frage, welche Reste gleich werden, wird im nächsten Teil dieses Kapitels beantwortet werden.

Wir haben jetzt unsere Aufmerksamkeit, statt auf einen einzelnen Rest auf die Gesamtheit aller Reste zu richten und gewinnen hiermit den eigentlichen Kernpunkt unserer analytischen Entwickelungen. *Die in diesen Resten sich darbietenden Integrale werden wir „verwandt" nennen.* Den mit diesem Wort bezeichneten Zusammenhang zwischen den Integralen kann man auch ohne Rücksicht auf unsere Approximationsprocesse dadurch definieren, dass man diejenigen gemeinsamen Eigenschaften angiebt, welche die verwandten Integrale völlig festlegen. Zunächst haben sie alle die Verzweigungspunkte e gemeinsam und ihre zu demselben Verzweigungspunkte gehörigen Exponenten unterscheiden sich nur um positive oder negative ganze Zahlen. Was die übrigen Verzweigungspunkte der verschiedenen Integrale angeht, so sind die Wurzeln von

$V_q = 0$ auszuschliessen, weil sie überhaupt keine Verzweigungspunkte des Integrals liefern. Dies erkennt man leicht, wenn man ein Integral in der Nachbarschaft einer Wurzel seines V_q entwickelt. Es kann dabei kein logarithmisches Glied auftreten, insofern kein solches Glied in der Entwickelung der entsprechenden Approximante und des Fundamentalintegrals für denselben Punkt enthalten ist. Die einzigen anderen Verzweigungspunkte müssen deshalb die Wurzeln von $W_{r-2} = 0$ sein. Diese werden wir mit ρ bezeichnen. Der zu irgend einem von ihnen gehörige Exponent, den man durch Reihenentwickelung erhält, wird 2 oder eine grössere positive Zahl sein, wenn ρ eine vielfache Wurzel ist. Wir schlagen für diese Punkte die Bezeichnung *ganzzahlige Punkte* vor. Sie sind im Allgemeinen verschieden bei den verschiedenen Integralen und *ihre Anzahl kann niemals $r - 2$ übersteigen.*

Auf diese Grenze ist hier Gewicht zu legen. Hätten wir andere algebraische Annäherungsfunktionen als unsere Approximanten ausgewählt, so würden wir, wie schon gesagt, auch zu einer Integralform für den Rest geführt sein, aber der Parallelismus mit dem Ausgangsintegral würde insofern gefehlt haben, als die Zahl der ganzzahligen Punkte nicht der obigen Beschränkung unterworfen gewesen wäre. Zugleich mit dieser Beschränkung würde auch die Eindeutigkeit der Bestimmung der Integrale durch die λ' verloren gegangen sein.

Aber diese Eigenschaften, die die Verzweigungspunkte und die Exponenten betreffen, genügen noch nicht zur Charakterisierung unserer verwandten Integrale. Wir haben bereits gelernt, dass die Differenz zwischen irgend einem von ihnen und dem sogenannten Fundamentalintegral eine Approximante ist. Daraus schliesst man sofort, dass der Unterschied zwischen irgend zweien von ihnen eine algebraische Funktion von der Form

$$\frac{U_{q'-1}}{V_{q'}} \Pi (x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i}$$

ist. Diese hinzutretende Eigenschaft setzt uns in den Stand, die verwandten Integrale, wie wir es wünschten, durch ihre wechselseitige Beziehung zu charakterisieren. Wir haben nämlich den Satz:

PROP. X.—*Die verwandten Reste enthalten sämmtliche Integrale der Form*

$$\int \frac{W_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{V_q^2 \cdot \Pi (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda_i}} \quad \lambda_i' - \lambda_i \equiv 0 \pmod 1$$

mit $r+1$ gemeinsamen Verzweigungspunkten e und nicht mehr als $r-2$ ganzzahligen Punkten, welche sich durch algebraische Funktionen $\frac{U_{q'-1}}{V_{q'}} \Pi (x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i}$ unterscheiden.

Den Beweis des Satzes führen wir indirect. Es seien, wenn möglich,

$$\int \frac{W_{r-2} . dx}{V_q^2 . \Pi (x - e_i)^{1-\lambda_i'}} \quad \text{und} \quad \int \frac{W_{r-2}' . dx}{V_q'^2 . \Pi (x_1 - e_i)^{1-\lambda_i'}}$$

zwei Integrale mit denselben Exponenten $\lambda_1', \lambda_2', \ldots . \lambda_{r+1}'$. Setzen wir dann zunächst voraus, dass V_q und V_q' keine Potenz von irgend einem $x - e_i$ enthalten, so muss die erste Potenz dieses Binoms, die in der Reihenentwickelung der Differenz der beiden Integrale in der Umgebung der einzelnen Verzweigungspunkten e_i auftritt, den Exponenten λ_i' oder einen grösseren haben und es müssen deshalb dieselben Potenzen als Faktoren in der algebraischen Differenz enthalten sein. Abgesehen von einigen Punkten e, die möglicher Weise als Unendlichkeitspunkte der Integrale und deshalb auch ihrer Differenz auftreten können, kann letztere nur da noch unendlich werden, wo V_q oder V_q' Null wird. Die Differenz ist deshalb ausdrückbar durch

$$\frac{\Pi (x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i'} . P (x_1, x_2)}{V_q . V_q'},$$

wo P eine ganze rationale Form ist. Da indessen die Differenz als Funktion von x vom nullten Grade in x_1, x_2 ist, so muss, da

$$\Sigma \lambda' = 2q + 1$$

ist, P von dem $(-1)^{\text{sten}}$ Grad sein. Die Forderungen sind ersichtlich unverträglich und deshalb können, so lange V_q und V_q' keine der Binome enthalten, keine zwei Integrale mit denselben charakteristischen Zahlen λ' gefunden werden. Setzen wir jetzt weiter voraus, dass V_q und V_q', entweder das eine oder beide, einige der Binome enthalten. Es trete z. B. die höchste Potenz von $x_1 - e_i x_2$ in V_q auf, etwa die ω_i^{ste}. Wenn dieselbe nicht in W_{r-2} enthalten ist (vgl. S. 14), werden wir übereinkommen $(x_1 - e_i x_2)^{2\omega_i}$ von V_q^2 in den irrationalen Teil des Integrals zu werfen und demnach das Integral zu einem anderen System λ' als dem vorhin angenommenen rechnen. Wenn dagegen dieselbe Potenz in W_{r-2} auftritt, dann muss die erste Potenz, die in der Entwickelung der beiden Integrale auftritt die $(\lambda_i - \omega_i)^{\text{ste}}$ sein. Da das Gleiche für die Differenz gelten muss,

und der oben aufgestellte Ausdruck mit dieser Bedingung verträglich ist, so schliesst man wie vorher, dass die Differenz in der obigen Form dargestellt werden kann, was wieder zu demselben Widerspruche führt. Für gegebene Werte von λ' kann deshalb nur ein Integral gefunden werden. Nun giebt es aber sicher für jedes Wertsystem λ' ein Integral unter unseren verwandten Resten, woraus die Wahrheit des oben aufgestellten Satzes erhellt.

Der Zielpunkt dieses Kapitels ist so erreicht. *Unsere verwandten Integrale sind vollständig unabhängig von dem Approximationsprocess definiert und deshalb sind sie jetzt als das Wesentliche an Stelle der Approximanten zu betrachten.* Innerhalb ihrer Gesamtheit sind alle unsere Integrale gleichberechtigt. Irgend eins bestimmt durch seine e und λ' die Gesamtheit. Die Auswahl unseres Fundamentalintegrals als Basis der Approximation war rein zufällig. Irgend ein anderes $\int \frac{W_{r-2}.(x_1 dx_2)}{\Pi (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda'_i}}$, in welchem V_q sich auf eine Constante reduciert, würden wir ebensowohl gewählt haben können. Man würde dann zu einem ganz neuen System von Approximanten geführt worden sein, das aber nichtsdestoweniger dasselbe System von den V_q ergeben haben würde, da diese Polynome eine invariante Charakteristik der Integrale sind und eine selbstständige Bedeutung haben. Die alten Zähler würden indessen in dem neuen Systeme von Approximanten nicht wieder auftreten. Sie sind Elemente, die unseren Integralen von unserem neuen Gesichtspunkte aus fremd sind.

Die Wichtigkeit und Bedeutung unseres Begriffes „Verwandtschaft" werden wir besser mit Hülfe der Gruppentheorie verstehen. Die Gestalt der zum Integral

$$\eta = \int \frac{W_{r-2}.(x_1 dx_2)}{V_q^2.\Pi (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda'_i}}$$

gehörigen Substitutionsgruppe ist wohl bekannt. Wenn x einen Umlauf um einen ganzzahligen Punkt ρ beschrieben hat, kehrt η zu seinen Anfangswert zurück. Deshalb werden die Substitutionen der Gruppe nur erzeugt durch Umläufe des x um die Verzweigungspunkte e_i. Anderseits wird jedes Element des Integrals dann mit $e^{2i\pi\lambda_i}$ multipliciert; die erzeugenden Substitutionen der Gruppe, welche η erleidet, müssen also von der Form

$$\eta' = e^{2i\pi\lambda_i}\eta + b$$

sein. Deshalb gilt allgemein

Prop. XI.—*Die Gruppe von Substitutionen unseres Integrals η hat die Form einer linearen Transformation $\eta' = a\eta + b$.*

Um die Gruppen der verschiedenen Integrale zu vergleichen, haben wir auf die Gleichung

$$\int \frac{W_{r-2}.(x_1\,dx_2)}{\Pi\,(x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda_i}} = \frac{U_p}{V_q}\,\Pi\,(x_1 - e_i x_2)^{\bar{\lambda}_i} + \int \frac{W'_{r-2}.(x_1\,dx_2)}{V_q^2.\Pi\,(x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda'_i}} \tag{2}$$

zurückzugreifen, wo $\bar{\lambda}_i$ die algebraisch kleinste von den Zahlen λ_i und λ'_i bedeutet. Bezeichnet man das Ausgangsintegral mit η_1, die Approximante mit η_2, den Rest mit η_3, so hat man für die erzeugenden Substitutionen ihrer respectiven Gruppen:

$$\eta'_1 = e^{2i\pi\lambda_i}\eta_1 + b,$$
$$\eta'_2 = e^{2i\pi\lambda_i}\,\eta_2,$$
$$\eta'_3 = e^{2i\pi\lambda_i}\,\eta_3 + b'.$$

Da aber gemäss der obigen Gleichung:

$$\eta_1 = \eta_2 + \eta_3,$$

und

$$\eta'_1 = \eta'_2 + \eta'_3$$

ist, so folgt

$$b = b'.$$

Man schliesst daher sogleich:

PROP. XII.—*Die Gesamtheit unserer verwandten Integrale besitzt eine gemeinsame Gruppe.*

Nun kann man sehr leicht die Umkehrung von Prop. XI nachweisen, nämlich dass jede Funktion ohne wesentlich singuläre Punkte, die durch die erzeugenden Substitutionen

$$\eta' = e^{2i\pi\lambda}\,\eta + b$$

charakterisiert ist, durch ein solches Integral wie das obige η dargestellt werden kann, wobei nur die Beschränkung betreffs der Anzahl der ganzzahligen Punkte fallen gelassen werden muss. Wenn wir jetzt noch die Bedingung hinzufügen, dass zwei solche Integrale nicht nur dieselbe Gruppe, sondern auch die Verzweigungspunkte gemeinsam haben, welche zu der Gruppe Veranlassung geben, dann verhält sich ihre Differenz multiplicativ bei irgend welchen Umläufen von x. Daraus ist leicht nachzuweisen, dass sie ihrerseits eine algebraische Funktion $\frac{U_{q'-1}}{V_{q'}}\,\Pi\,(x_1 - e_i x_2)^{\lambda}$ ist, wo die e die Verzweigungspunkte der Gruppe bedeuten und die λ sich nur um ganze Zahlen von den entsprechenden λ' der Integrale unterscheiden. Nun haben wir in unserer Gesamtheit alle Integrale der betrachteten Gestalt mit nicht mehr als $r - 2$ ganzzahligen Punkten, welche sich

durch algebraische Funktionen der obigen Art unterscheiden. Daher erkennt man die Richtigkeit von

PROP. XIII.—*Die Gesamtheit unserer verwandten Integrale umfasst alle diejenigen Integrale mit nicht mehr als $r-2$ ganzzahligen Punkten, die eine Gruppe $\eta' = a\eta + b$ und die zugehörigen Verzweigungspunkte gemein haben.*

Es erübrigt noch, kurz den Zusammenhang unserer Integrale mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu charakterisieren. Möge eine reguläre Gleichung dieser Art, die eine *einzige* algebraische Lösung besitzt, für den Augenblick betrachtet werden. Der Quotient einer transcendenten und der algebraischen Lösung kann in die Form unserer Integrale gesetzt werden, und umgekehrt kann jedes derartige Integral als der eben bezeichnete Quotient zweier Lösung einer solchen Differentialgleichung der zweiten Ordnung angesehen werden. Die Differentialgleichung kann ferner so transformiert werden, dass sie geradezu das Polynom V als Lösung darbietet. Thut man dies, so erhält man:

PROP. XIV.—*Das im Integral* $\int \frac{W_{r-2}.(x_1 dx_2)}{V^2.\Pi(x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda'_i}}$ *auftretende Polynom V ist eine Lösung der Differentialgleichung*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1-\lambda_1'}{x-e_1} + \ldots + \frac{1-\lambda'_{r+1}}{x-e_{r+1}} - \frac{1}{x-\rho_1} - \ldots - \frac{1}{x-\rho_{r-2}}\right)\frac{dy}{dx}$$
$$+ \frac{(A_0 x^{2r-5} + A_1 x^{2r-4} + \ldots)\,y}{(x-e_1)\ldots(x-e_{r+1})(x-\rho_1)\ldots(x-\rho_{r-2})} = 0,$$

in der wir die accessorischen Parameter A in geeigneter Weise bestimmt denken müssen.

Falls keine ganzzahlige Punkte in dem Integrale vorhanden sind und $e_{r+1} = \infty$ gesetzt wird, wird diese Gleichung die Form annehmen:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1-\lambda_1'}{x-e_1} + \ldots + \frac{1-\lambda_r'}{x-e_r}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{(A_0' x^{r-2} + A_1' x^{r-3} + \ldots)\,y}{(x-e_1)\ldots(x-e_r)} = 0.$$

Solchen Gleichungen genügen Polynome V, welche den grösst möglichen Irregularitäten in den später zu betrachtenden Fällen entsprechen.

Die Gruppeneigenschaften der verwandten Integrale können nun sofort auf die Differentialgleichungen für die Polynome V übertragen werden. Möge y_1 eine

transcendente Lösung der Differentialgleichung für eins der Polynome V bezeichnen, so dass

$$y_1 = V\int \frac{W_{r-2}.(x_1\,dx_2)}{V^2.\Pi\,(x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda_i}}$$

ist. Aus der Gruppe des Integrals resultiert dann die für die Differentialgleichung, nämlich

$$y_1' = ay_1 + bV.$$

Als Aequivalent von Prop. XIV leiten wir so ab:

PROP. XV.—*Unsere Polynome V umfassen alle Polynome, deren Differentialgleichungen ausser den Verzweigungspunkten e auch noch die Substitutionsgruppe $y_1' = ay_1 + bV$ gemein haben und übrigens nicht mehr als $r - 2$ ganzzahlige Punkte enthalten.*

Auf diese Weise dehnt man Heun's Auffassung der Gruppeneigenschaften der Reste und Näherungsnenner gewisser Kettenbrüche (vgl. Kap. II, A.) auf die weit ausgedehntere Mannigfaltigkeit unserer Restintegrale und Polynome aus.

(C). *Die Kettenbrüche.*

Die Methode, die man zur näherungsweisen Darstellung einwertiger Funktionen gewöhnlich benutzt, bedient sich der so genannten algebraischen Kettenbrüche $\nu_0 + \cfrac{\mu_1}{\nu_1 + \cfrac{\mu_2}{\nu_2 + \cfrac{\mu_3}{\nu_3 + \ldots}}}$, wo die μ und ν ganze rationale Funktionen von x sind. Der Einfachheit halber werden wir dieselben in folgender Form schrieben: $\nu_0 \dot{+} \frac{\mu_1}{\nu_1} \dot{+} \frac{\mu_2}{\nu_2} \dot{+} \frac{\mu_3}{\nu_3} + \ldots$. In Wirklichkeit ist der Kettenbruch nicht mehr und nicht weniger als eine systematische Anordnung gewisser Annäherungsfunktionen, die man Näherungsbrüche nennt. Die Anordnung wird dabei so gewählt, dass im Allgemeinen die Grösse der Annäherung mit jedem Fortschreiten in der Reihe der Näherungsbrüche wächst. Betrachtet man in ähnlicher Weise $\int_{x'}^{x} \frac{W_{r-2}.\,dx}{V_q^2.\Pi\,(x - e_i)^{1-\lambda_i}}$, wo x' einen festen, x einen variabelen Punkt bedeutet, so stehen einem zwei Wege offen. Entweder kann man das Integral durch $\Pi\,(x - e_i)^{\lambda_i}$ teilen, um es in der Nähe der Verzweigungspunkte

einwertig zu machen und dann eine Approximation durch einen solchen Kettenbruch suchen, oder man kann direct die Approximation durch

$$F_1(x) = \Pi(x - e_i)^{\lambda_i} \cdot \left(\nu_0 + \frac{\mu_1}{\nu_1} \dot{+} \frac{\mu_2}{\nu_2} \dot{+} \cdots\right)$$

in Ansatz bringen. Diese Funktion $F_1(x)$ werden wir eine erzeugende Funktion des Kettenbruchs oder schlechtweg eine *Erzeugende* nennen. Die beiden Methoden sind natürlich nur verschiedene Darstellungen derselben Sache. Die Näherungsbrüche der ersteren Methode, multipliciert mit $\Pi(x - e_i)^{\lambda_i}$, geben die Approximanten der letzteren. Wir werden hier vorzugsweise die zweite Behandlungweise benutzen und auch so weit als möglich unsere homogene Schreibweise beibehalten. Unter den μ und ν werden wir deshalb gewöhnlich Formen von x_1, x_2 verstehen, welche man, wenn es wünschenswert scheint, durch die Substitution

$$x_1 = x, \quad x_2 = 1$$

in Funktionen umsetzen kann. *Diese homogene Bezeichnung ist, so weit ich weiss, hier zum ersten Mal auf einen Kettenbruch angewandt und hat, wie wir finden werden, für uns einen grossen Vorteil gegenüber der üblichen nicht homogenen.* Man kann deshalb vermuten, dass sie auch in der Theorie der Kettenbrüche im Allgemeinen mit Vorteil zu benutzen sein wird.—Wir werden auch in Zukunft die untere constante Grenze der Integration fortlassen, welche sich der Leser für alle verwandten Integrale in derselben Weise hinzudenken möge.

Unser Problem ist offenbar, ein Arrangement der Approximanten oder Restintegrale zu suchen, das zu einer Erzeugenden $F_1(x)$ führt. Zunächst müssen wir aber ein Uebereinkommen betreffs der Natur der hier einzuführenden Kettenbrüche treffen. Wir werden die Convention, dass die Annäherung beim Fortschreiten in der Reihe der Näherungsbrüche stets wächst, hier behalten, wollen dabei aber immer die *Gesamtapproximation* in der Nähe der verschiedenen Verzweigungspunkte, bei denen wir approximieren wollen, in Rechnung ziehen. Möge jetzt Z_n, N_n, R_n Zähler und Nenner des n^{ten} Näherungsbruches und den n^{ten} Rest bezeichnen. Für den letzteren hat man die wohlbekannte Formel:

$$R_n = \pm \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{n+1} \left(\frac{1}{N_n N_{n+1}} - \frac{\mu_{n+2}}{N_{n+1} N_{n+2}} + \frac{\mu_{n+2}\mu_{n+3}}{N_{n+2} N_{n+3}} - \cdots\right).^*$$

* Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, Bd. I, S. 263.

Seien $e_1, \dots . e_i$ die Punkte, bei denen eine Annäherung gesucht wird. Um eine möglichst grosse Gesamtannäherung in diesen Punkten zu erzielen, hat man nur dafür Sorge zu tragen, dass die Summe der Exponenten mit welchen die Binome $x - e_1, \dots . x - e_i$ zuerst in den Reihenentwickelungen von R_n in der Nähe der betreffenden Punkte auftreten, möglichst gross sei. Ein Blick auf die letzte Gleichung zeigt, dass zu diesem Zwecke die Partialzähler nur Faktoren $x - e_1, \dots . x - e_i$ enthalten dürfen. *Als Typus unseres Kettenbruches werden wir deshalb einen solchen nehmen, bei dem die Partialzähler μ nur aus Potenzen der Binome $x_1 - ex_2$ zusammengesetzt sind.*

Nachdem wir uns über die Form unserer Kettenbrüche verständigt haben, haben wir jetzt zu untersuchen, wie die Integrale und Approximanten ausgewählt werden müssen, damit sie successive zu einer Erzeugenden gehören. Die notwendige und hinreichende Bedingung, damit eine Reihe von rationalen Funktionen oder Formen $\frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \dots . \frac{Z_n}{N_n}$, wo Zähler und Nenner jedes Bruches als teilerfremd vorausgesetzt werden, die Näherungsbrüche eines Kettenbruches bildet, dessen Partialzähler und Nenner Polynome in x, resp. Formen in x_1, x_2 sind, ist nun die, dass die Differenz zwischen irgend zwei aufeinanderfolgenden Brüchen der Reihe $\frac{\mu_1 \mu_2 \dots . \mu_n}{N_{n-1} N_n}$ ist. Der Zähler einer jeden solchen Differenz wird dann aus dem Zähler der vorhergehenden durch Multiplication mit einem neuen Partialzähler μ erhalten, und es werden auch folgende Relationen zwischen den N, bez. Z und RN bestehen:

$$\left.\begin{aligned} N_n &= \nu_n N_{n-1} &&+ \mu_n N_{n-2}, \\ Z_n &= \nu_n Z_{n-1} &&+ \mu_n Z_{n-2}, \\ R_n N_n &= \nu_n R_{n-1} N_{n-1} &&+ \mu_n R_{n-2} N_{n-2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Nach Voraussetzung sollen nun in $F_1(x)$ die μ aus den $x_1 - ex_2$ zusammengesetzt werden. Deshalb muss der Zähler der Differenz zwischen zwei successiven Approximanten oder, wie wir hier lieber sagen wollen, zwischen den beiden entsprechenden Integralen ein aus lauter Faktoren $x_1 - ex_2$ zusammengesetztes Produkt sein.

Bevor wir diese Bedingung zu erfüllen suchen, wollen wir zunächst in Anlehnung an die gewöhnliche Theorie der Kettenbrüche zwei Fälle unterscheiden. In demjenigen Falle, den wir den *Normalfall* nennen wollen, ist jede

Approximante und auch jeder Rest verschieden von jedem anderen. In dem *anormalen Falle* werden eine Anzahl von ihnen resp. gleich sein. Wir werden zuerst den ersten Fall erledigen. Hier ist die Gesamtordnung der Approximation genau um 1 grösser als die Summe der Grade der entsprechenden U_p und V_q, diese sind notwendigerweise relativ prim zu einander und die V_q und W_{r-2} in den Integralen enthalten keinen Faktor $x_1 - ex_2$. Es möge jetzt verlangt werden, dass man die Differenz zwischen den beiden Integralen

$$\int \frac{W'_{r-2}.(x_1 dx_2)}{V^2_{q'}.\Pi(x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda'_i}} \text{ und } \int \frac{W''_{r-2}.(x_1 dx_2)}{V^2_{q''}.\Pi(x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda''_i}}$$

in der oben auseinandergesetzten Weise ausdrücken kann. Möge $\bar{\lambda}_i$ der algebraisch kleinste der beiden Exponenten λ'_i und λ''_i sein, $\Delta\lambda_i$ ihre numerische Differenz. Dann wird in der für die Umgebung des Punktes e_i geltenden Reihenentwickelung der Differenz der Integrale die niedrigste Potenz von $x - e_i$ die $\bar{\lambda}_i^{\text{te}}$ sein, abgesehen von gewissen möglicher Weise eintretenden Ausnahmefällen, in denen λ'_i und λ''_i gleich sind. In diesen Fällen kann die niedrigste auftretende Potenz einen grösseren Exponenten haben. Abgesehen von Punkten e wird unsere Differenz keine anderen Unendlichkeitspunkte als die Wurzeln von $V_{q'} = 0$ und $V_{q''} = 0$ haben. Deshalb kann man sie in der Form ausdrücken:

$$\frac{\Pi(x_1 - e_i x_2)^{\bar{\lambda}_i}.P_{q'+q''-\Sigma\bar{\lambda}}}{V_{q'}.V_{q''}},$$

wo P eine ganze rationale Form des angezeigten Grades ist, welche keine Faktoren $x_1 - ex_2$ enthält. Da jetzt

$$2q' + 1 = \Sigma\lambda',$$
$$2q'' + 1 = \Sigma\lambda'',$$

und $\Sigma\lambda' + \Sigma\lambda'' = 2\Sigma\bar{\lambda} + \Sigma.\Delta\lambda$ ist, kann der Grad von P in der einfacheren Form $\frac{\Sigma.\Delta\lambda - 2}{2}$ ausgedrückt werden. Wollen wir nun verlangen, dass der Zähler nur Potenzen von $x_1 - ex_2$ enthalten soll, so muss P eine Constante sein oder

$$\Sigma.\Delta\lambda = 2.$$

Unser Resultat können wir in folgendes Theorem zusammenfassen:

In dem Normalfalle ist eine notwendige Bedingung, damit zwei der Integrale successive Reste einer Kettenbrucherzeugenden $F_1(x)$ sind, die, dass die Summe der numerischen Differenzen ihrer Exponenten 2 *ist.*

Irgend zwei solche Integrale werden wir deshalb *benachbarte Integrale* nennen. Es giebt zwei Möglichkeiten für sie: entweder können sich zwei Exponenten des einen Integrals von den entsprechenden zwei des anderen um eine Einheit unterscheiden oder ein einzelnes Paar um zwei Einheiten.

Es erübrigt jetzt noch, obige notwendige Bedingung in eine hinreichende zu verwandeln. Die Differenz ist in der gewünschten Weise durch den Quotienten $\frac{\Pi(x_1 - e_i x_2)^{\bar{\lambda}_i}}{V_{q'} V_{q''}}$ ausgedrückt. Es soll jetzt erzwungen werden, dass jede folgende Differenz aus der vorhergehenden durch Hinzufügung eines neuen Faktors, nämlich eines Produkts von Potenzen der $x_1 - ex_2$, im Zähler entsteht. Da der Exponent einer Potenz Null sein kann, so wird es genügen, zu verlangen, dass keine Potenz eines $x_1 - ex_2$, d. h. kein $\bar{\lambda}$ beim Fortschreiten in der Reihe abnimmt. Dies wird sicher der Fall sein, so lange die Incremente $\Delta\lambda$, successive von Integral zu Integral genommen, positiv sind. Aber man darf daraus nicht schliessen, dass sie niemals negativ sein dürften. Es kann in der That wohl sein, dass sich ein N_n, d. h. der Nenner einer Approximante, von dem entsprechenden V_q durch Potenzen der $x_1 - ex_2$ unterscheidet. Man hat dann im Zähler und Nenner der entsprechenden Integralendifferenzen dieselben Potenzen hinzuzufügen. Hat man auf diese Weise in der n^{ten} Differenz der Verminderung der $\bar{\lambda}$ das Gegengewicht gehalten, so ist man dann berechtigt, die Differenz dem Ausdruck $\frac{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}{N_{n-1} N_n} \Pi(x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i}$ gleich anzusetzen. Wenn dagegen die Potenz eines $x_1 - ex_2$ in dem so modificierten Zähler noch kleiner bleibt als in der gerade vorangehenden Differenz, so kann man folgenderweise verfahren. Man führt in den Zähler und Nenner der betrachteten Differenz geeignete Potenzen dieses Binoms ein, auch in Z_n und N_n, so dass sie nicht mehr teilerfremd sind. Thut man dies, so hat man in der Reihe der so modificierten Approximanten $\frac{Z_n}{N_n} \Pi(x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i}$ die gesuchte Erzeugende. Fälle dieser Art kommen nicht in dieser Abhandlung zu einer expliciten Darstellung, und deshalb überspringen wir den Beweis der letzten Behauptung. Jedenfalls aber ist die oben formulierte Bedingung ebensowohl notwendig als hinreichend, mit anderen Worten:

PROP. XVI.—*Die hinreichende Bedingung, dass eine Reihe von verwandten Integralen die successiven Reste einer Kettenbrucherzeugenden der gewollten Art sind, ist die, dass sie successive benachbart sind.*

Wir schlagen zunächst das Studium einiger der möglichen Kettenbrüche vor. Zu Anfang ist ein Fundamentalintegral als Basis der Approximation auszuwählen. Die wichtigsten Kettenbrüche für dieses sind dann diejenigen, welche man „*regulär*" nennt. Mit diesem Ausdruck bezeichnet man einen Kettenbruch, dessen Theilzähler nach dem ersten sämtlich gleich sind, bei welchen also die Approximation von Rest zu Rest stéts für dieselben Punkte und für diese im gleichen Betrage zunimmt. Da wir nur höchstens zwei Exponenten von Rest zu Rest variieren können, so können wir nur solche reguläre Kettenbrüche finden, die in der Nähe von höchstens zwei Verzweigungspunkten approximieren. Mögen diese e_1 und e_2 sein. Um die Verhältnisse besser zu überschauen, werden wir die Integrale und die entsprechenden Approximanten in Tabellen eintragen, in welchen alle Exponenten mit Ausnahme von λ_1', λ_2' constant erhalten werden.

Approximation von $F(x) = \int \frac{W_{r-2} \cdot (x_1\,dx_2)}{\Pi\,(x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda_i}}$ *durch*

$$F_1(x) = \Pi\,(x_1 - e_i x_2)^{\lambda_i} \left\{ \nu_0 + \frac{\mu_1}{\nu_1} \dot{+} \frac{\mu_2}{\nu_2} \dot{+} \ldots \right\},$$

wo die μ aus lauter Faktoren $x_1 - e_1 x_2$ und $x_1 - e_2 x_2$ bestehen.

Tabelle I.—*Die Approximanten* $\frac{Z_n}{N_n}\,\Pi\,(x_1 - e_i x_2)$.

$\frac{Z_n}{N_n}$	0	1	2	3
0	—	$\frac{U_{01}}{x_1 - e_2 x_2}$	$\frac{U_{02}}{(x_1 - e_2 x_2)^2}$	$\frac{U_{03}}{(x_1 - e_2 x_2)^3}$
1	$\frac{U_{10}}{V_{10}}$	$\frac{U_{11}}{V_{11}}$	$\frac{U_{12}}{V_{12} \cdot (x_1 - e_2 x_2)}$	$\frac{U_{13}}{V_{13} \cdot (x_1 - e_2 x_2)^2}$
2	$\frac{U_{20}}{V_{20}}$	$\frac{U_{21}}{V_{21}}$	$\frac{U_{22}}{V_{22}}$	$\frac{U_{23}}{V_{23} \cdot (x_1 - e_2 x_2)}$
3	$\frac{U_{30}}{V_{30}}$	$\frac{U_{31}}{V_{31}}$	$\frac{U_{32}}{V_{32}}$	$\frac{U_{33}}{V_{33}}$

Tabelle II.—*Die entsprechenden Reste.*

0	1	2	3
$F(x)$	$\int \frac{W^{(01)}.(x_1\,dx_2)}{(x_1 - e_1x_2)^{-\lambda_1}(x_1 - e_2x_2)^{-\lambda_2+2}}$	$\int \frac{W^{(02)}.(x_1\,dx_2)}{(x_1 - e_1x_2)^{-\lambda_1-1}(x_1 - e_2x_2)^{-\lambda_2+3}}$	$\int \frac{W^{(03)}.(x_1\,dx_2)}{(x_1 - e_1x_2)^{-\lambda_1-2}(x_1 - e_2x_2)^{-}}$
$\frac{W^{(10)}.(x_1\,dx_2)}{x_1 - e_1x_2)^{-\lambda_1}(x_1 - e_2x_2)^{-\lambda_2}}$	$\int \frac{W^{(11)}.(x_1\,dx_2)}{V_{11}^2.(x_1 - e_1x_2)^{-\lambda_1-1}(x_1 - e_2x_2)^{-\lambda_2+1}}$	$\int \frac{W^{(12)}.(x_1\,dx_2)}{V_{12}^2.(x_1 - e_1x_2)^{-\lambda_1-2}(x_1 - e_2x_2)^{-\lambda_2+2}}$	$\int \frac{W^{(13)}.(x_1\,dx_2)}{V_{13}^2.(x_1 - e_1x_2)^{-\lambda_1-3}(x_1 - e_2}$
$\frac{W^{(20)}.(x_1\,dx_2)}{x_1 - e_1x_2)^{-\lambda_1-1}(x_1 - e_2x_2)^{-\lambda_2-1}}$	$\int \frac{W^{(21)}.(x_1\,dx_2)}{V_{21}^2.(x_1 - e_1x_2)^{-\lambda_1-2}(x_1 - e_2x_2)^{-\lambda_2}}$	$\int \frac{W^{(22)}.(x_1\,dx_2)}{V_{22}^2(x_1 - e_1x_2)^{-\lambda_1-3}(x_1 - e_2x_2)^{-\lambda_2+1}}$	$\int \frac{W^{(23)}.(x_1\,dx_2)}{V_{23}^2.(x_1 - e_1x_2)^{-\lambda_1-4}(x_1 - e_2}$
$\frac{W^{(30)}.(x_1\,dx_2)}{x_1 - e_1x_2)^{-\lambda_1-2}(x_1 - e_2x_2)^{-\lambda_2-2}}$	$\int \frac{W^{(31)}.(x_1\,dx_2)}{V_{31}^2.(x_1 - e_1x_2)^{-\lambda_1-3}(x_1 - e_2x_2)^{-\lambda_2-1}}$	$\int \frac{W^{(32)}.(x_1\,dx_2)}{V_{32}^2.(x_1 - e_1x_2)^{-\lambda_1-4}(x_1 - e_2x_2)^{-\lambda_2}}$	$\int \frac{W^{(33)}.(x_1\,dx_2)}{V_{33}^2.(x_1 - e_1x_2)^{-\lambda_1-5}(x_1 - e_2}$

In diesen Tabellen sind diejenigen Formen von x_1, x_2, welche von Glied zu Glied sich ändern mit Doppelindices versehen, die den Reihen und Columnen entsprechen. Wenn wir eine Horizontalreihe nach rechts entlang oder eine Vertikalreihe hinabgehen, so wächst der Exponent λ_1' in der zweiten Tabelle und damit die Charakteristik m_1 für e_1 in der ersten Tabelle. Längs einer Horizontalreihe vermindert sich λ_2' und damit m_2, in der Vertikalreihe wachsen sie nach unten zu. Ein dadurch entstehendes negatives m_2 ist das, was wir früher mit $-n_2$ bezeichneten. Der erste Index von V giebt seinen Grad an. Den Grad eines U kann man sich dann durch die Ueberlegung bestimmen, dass der Unterschied der Grade von N_n und Z_n in Tabelle I eins sein muss. Es mag bemerkt werden, dass die Tabellen, um sie zu vervollständigen, ebensowohl nach links wie nach rechts fortgesetzt werden sollten. Dies kann leicht geschehen, da die Hälfte, die man linker Hand von der ersten Columne hinzufügen hat, in jeder Beziehung mit der rechter Hand symmetrisch sein muss, abgesehen davon, dass e_1 und e_2 ihre Rolle vertauscht haben. Die hier gegebene halbe Tabelle genügt indessen für unseren Zweck.

Drei reguläre Anordnungen in Bezug auf das Fundamentalintegral $F(x)$ sind sofort evident. Man kann

I) längs der Diagonale,

II) längs der ersten Vertikalcolumne,

III) längs der ersten Horizontalreihe vorwärts schreiten.

Diesen drei Wegen werden wir noch einen vierten hinzufügen, den man erhält, wenn man gewissermassen eine Treppenlinie von der Ecke der Tabelle abwärts beschreibt, d. h. abwechselnd einen Schritt nach rechts und dann einen nach unten macht.

Reguläre Kettenbrüche.

Typus I.—Wenn wir die Diagonale von Tabelle II entlang gehen, so bleibt von Integral zu Integral der Exponent λ_2' für e_2 ungeändert, während λ_1' gleichförmig um zwei Einheiten wächst. Die Ordnung der Approximation in e_1, die durch die in der Diagonale stehenden Approximanten der anderen Tabelle geliefert wird, wächst deshalb in demselben Masse, und die successiven Teilzähler der Erzeugenden müssen $(x_1 - e_1 x_2)^2$ enthalten. Die Grade der Teilzähler und Nenner können sofort durch die Recursionsformel (3) für N, nämlich

$$V_{n,\,n} = \nu_n V_{n-1,\,n-1} + \mu_n V_{n-2,\,n-2}$$

bestimmt werden. Wir schliessen deshalb, *dass der erste Typus von regulären Kettenbrüchen die Form hat:*

$$\frac{1}{a_0x_1 + b_0x_2} \dotplus \frac{(x_1 - e_1x_2)^2}{a_1x_1 + b_1x_2} \dotplus \frac{(x_1 - e_1x_2)^2}{a_2x_1 + b_2x_2} \dotplus \cdots.$$

Dies ist die am meisten gebräuchliche Art von Kettenbrüchen. Die entsprechende Erzeugende umfasst das, was wir eine Klasse von Approximanten nannten, und liefert die beste Approximation in nur einem Verzweigungspunkte.

Typus II.—Wenn man die Vertikalcolumne von Tabelle II hinabgeht, so wachsen die zu e_1 und e_2 gehörenden Exponenten λ' beständig um eine Einheit. Wir schliessen daraus in ähnlicher Weise wie oben, dass die Teilzähler $(x_1 - e_1x_2)(x_1 - e_2x_2)$ sind und die Teilnenner linear. *Der zweite Typus von regulären Kettenbrüchen ist also dieser:*

$$\frac{1}{a_0x_1 + b_0x_2} \dotplus \frac{(x_1 - e_1x_2)(x_1 - e_2x_2)}{a_1x_1 + b_1x_2} \dotplus \frac{(x_1 - e_1x_2)(x_1 - e_2x_2)}{a_2x_1 + b_2x_2} \dotplus \cdots.$$

Jede der folgenden Approximanten approximiert $F(x)$ in der nächst höheren Ordnung sowohl bei e_1 wie e_2.

Typus III.—Wenn man der ersten Horizontallinie nach rechts folgt, so wächst der Exponent λ'_1 für e_1 successive um eine Einheit, während sich derjenige für e_2 um denselben Betrag vermindert. Aber die N enthalten Potenzen von $x_1 - e_2x_2$, und wenn wir dieselben Potenzen im Zähler und Nenner der betreffenden Differenzen der Integrale hinzufügen, so finden wir, dass dann die im Zähler stehende Potenz dieses Binoms stets um 1 von einer Differenz zu der nächsten wächst. Deshalb enthält jedes μ_n den Faktor $x_1 - e_2x_2$. Dasselbe wird andererseits durch die Recursionsformel (3) verlangt:

$$(x_1 - e_2x_2)^n = \nu_n (x_1 - e_2x_2)^{n-1} + \mu_n (x_1 - e_2x_2)^{n-2},$$

während μ_n auch wegen der wachsenden Approximation bei e_1 durch $x_1 - e_1x_2$ theilbar ist. *Der dritte Typus von Kettenbrüchen hat daher dieselbe Form wie Typus II, aber das $x_1 - e_2x_2$ in den Teilzählern bringt kein Zunehmen der Approximation bei e_2 wegen der in N auftretenden Potenzen dieses Binoms mit sich.*

Typus IV.—Wenn man einer Treppenlinie von der Ecke der Tabelle abwärts folgt, dann wächst der Exponent λ'_1 regelmässig von Glied zu Glied um eine

Einheit, und jedes μ muss deshalb $x_1 - e_1 x_2$ enthalten. Andererseits schwankt λ_2' zwischen zwei festen Werten auf und ab, die sich um eine Einheit unterscheiden; $\overline{\lambda}_2$ indessen bleibt constant und deshalb werden die μ dadurch nicht beeinflusst. Da indessen entweder das N_n oder das erste Glied der für die $R_n N_n$ gültigen Reihenentwickelung in der Nähe von e_2 abwechselnd eine höhere Potenz von $x - e_2$ enthält, so folgt aus den Recursionsformeln (3), dass $x_1 - e_2 x_2$ ein Faktor jedes anderen Teilnenners ist. Daher stellt

$$\dot{+}\,\frac{x_1 - e_1 x_2}{a_1}\,\dot{+}\,\frac{x_1 - e_1 x_2}{a_2 (x_1 - e_2 x_2)}\,\dot{+}\,\frac{x_1 - e_1 x_2}{a_3}\,\dot{+}\,\frac{x_1 - e_1 x_2}{a_4 (x_1 - e_2 x_2)}\,\dot{+}$$

diesen Typus von Kettenbrüchen dar. Aehnlich wie bei Typus I approximiert die Erzeugende $F_1(x)$ nur in der Nähe eines einzelnen Verzweigungspunktes, aber die Annäherung an das Integral $F(x)$ geschieht nur halb so schnell wie im Falle I.

Wir dürfen nicht vergessen zu bemerken, dass in allen Fällen abgesehen von Typus III *die Ordnung der Approximation irgend einer Approximante bei e_1 oder e_2 erhalten werden kann, wenn man die Grade der entsprechenden Binome in den Teilzählern bis zu der Stelle, wo man den Kettenbruch abgebrochen hat, summiert, einschliesslich des ersten nach dieser Stelle.* Das Gleiche gilt für Typus III, nur muss man den Punkt e_2 auslassen.

Wären wir irgend einer der vier Arten von Linien gefolgt (im Falle des Typus III muss man wegen der Anwesenheit eines abnehmenden $\overline{\lambda}$ sorgfältig verfahren), indem wir von irgend einem anderen Punkte der Tabelle anstatt von einer Ecke ausgegangen wären, so würden wir zu Kettenbrucherzeugenden von ähnlicher Form geführt sein, die mit Irregularitäten in den ersten beiden Teilzählern und Nennern behaftet sind. In der That war die Ableitung der Form von ν und μ auf Recursionsformeln zwischen drei aufeinanderfolgenden Näherungsnennern und auf die Natur der Reste basiert; sie ist deshalb unabhängig von dem Platze der Tabelle, von welchem man ausgeht. Nur die ersten beiden Partialzähler und Nenner werden auf diese Weise nicht bestimmt. In ähnlicher Weise wurden die Irregularitäten in unsere ersten μ und ν eingeführt, was wir mit Stillschweigen übergingen.

In Tabelle II hätten wir an Stelle unseres Fundamentalintegrals irgend ein anderes, das an der eventuell verlängerten Horizontalgrenze liegt, als Basis der Approximation auswählen können. Eine neue Tabelle von Approximanten würde dem entsprechen. Man könnte natürlich wieder die vier Typen von

regulären Kettenbrüchen ableiten, wenn man jetzt die vier Arten von Linien zieht. Man bemerkt auch, dass für eine Senkrechte zur Diagonale dasselbe gilt wie für die Diagonale selbst oder eine Parallele zu ihr, nur dass λ_1' und λ_2' ihre Rollen vertauscht haben; λ_1' bleibt unverändert, während λ_2' regelmässig um zwei Einheiten wächst. Die zur Diagonale senkrechte Linie giebt deshalb einen Kettenbruch von Typus I. In ähnlicher Weise würden Horizontal- oder Treppenlinien, die nach links anstatt nach rechts laufen, Erzeugende vom Typus III und IV liefern, nur dass e_1 und e_2 vertauscht sind.

Man kann leicht nachweisen, dass dies die sämtlichen Typen von regulären Kettenbrüchen sind. *Einige der irregulären sind indessen auch bemerkenswert und können bestimmten Gesetzen folgen.* So könnte z. B. eine Zickzacklinie von einem am Rande gelegenen Integral nach unten gezogen werden, indem man abwechselnd einen Schritt längs der Diagonale und einen senkrecht zu ihr naht, aber dabei immer nach unten geht. Die Approximation der entsprechenden Erzeugenden wächst abwechselnd bei e_1 und e_2 um zwei Einheiten, und der Kettenbruchteil derselben ist

$$\frac{1}{a_0x_1+b_0x_2} \dot{+} \frac{(x_1-e_1x_2)^2}{a_1x_1+b_1x_2} \dot{+} \frac{(x_1-e_2x_2)^2}{a_2x_1+b_2x_2} \dot{+} \frac{(x_1-e_1x_2)^2}{a_3x_1+b_3x_2} \dot{+}$$

Wir gehen jetzt zu den „anormalen" Fällen über, in denen ein oder mehrere Integrale mehrmals in der Gesamtheit auftreten können. Wir werden uns wieder auf Erzeugende beschränken, die für zwei Verzweigungspunkte approximieren. Es mögen die Tafeln der Integrale und Approximanten genau wie vorher construiert sein, indem man alle Exponenten, abgesehen von λ_1' und λ_2', constant lässt, während diese innerhalb unserer Tabelle auf alle mögliche Weise variieren können. Alle Faktoren $x_1 - ex_2$ in W_{r-2} oder V kann man sich in den irrationalen Teil des Integrals geworfen denken. Wenn dann ein Integral

$$\int \frac{W_{r-2-\omega}\cdot(x_1 dx_2)}{V_q^2\cdot(x_1-e_1x_2)^{1-\lambda_1'-\omega}(x_1-e_2x_2)^{1-\lambda_2'}\cdot\ldots\cdot(x_1-e_{r+1}x_2)^{1-\lambda_{r+1}'}}$$

in der Gesamtheit vorkommt, so ist die Auffassung gestattet, dass *irgend einer* der Exponenten λ' durch die Vereinigung von ω Faktoren des Zählers mit dem entsprechenden binomischen Faktor des Nenners, um ω grösser geworden ist als er im normalen Falle wäre, sagen wir z. B., dass bei e_1 die Approximationsordnung um ω grösser sei, als die Charakteristik λ_1' verlangt. Dementsprechend kann das Integral in das durch $\lambda_1', \ldots . \lambda_{r+1}'$ charakterisierte Quadrat gesetzt

werden. Um zu finden, wo es sonst noch in der Tabelle auftritt, wollen wir zu den am Ende des Kap. I, A, angeführten Principien zurückkehren. Man kann jede der beiden ersten Charakteristiken λ_1', λ_2' um eine Einheit vermehren und so zu dem nächst unteren Quadrat in der Tabelle übergehen. Oder man kann den ersten Exponenten um eine Einheit vermehren und den zweiten um denselben Betrag vermindern, indem man sich so in das nach rechts liegende Quadrat bewegt. Oder endlich man kann λ_1' allein um zwei Einheiten vermehren und dadurch das Integral in das auf der Diagonale rechts zunächst liegende Quadrat versetzen. Diese Processe können ω Male auf alle mögliche Weise wiederholt werden, woraus man ersieht, dass das Integral in einem quadratischen Raume der Tabelle auftritt, der $(\omega+1)^2$ Quadrate umfasst. Derselbe Raum würde von einer anderen Ecke aus überstrichen, wenn man die andere Auffassung festhielte, dass λ_2' um ω grösser als gewöhnlich wäre, $\lambda_1'+\omega$ dagegen der normale Exponent.

Um besser zu verstehen, wie die Exponenten andere Werte als die normalen annehmen, bemerken wir hier nochmals, dass ein Exponent λ' um eine Einheit vermehrt wird, wenn sich ein linearer Faktor von W_{r-2} mit einem binomischen Faktor des Nenners verbinden lässt; dagegen um eine Einheit vermindert wird, wenn zu gleicher Zeit das Quadrat desselben aus V^2 fortgeschafft werden kann.

Ein Beispiel eines solchen quadratischen Raumes ist in Tabelle III gegeben. Hier ist in dem zweiten Gliede der ersten Columne der Grad von W um zwei Einheiten kleiner als im normalen Falle. Dasselbe Integral ist deshalb in jedes Quadrat des in der Tabelle angezeigten quadratischen Raumes zu setzen. Dementsprechend giebt es auch einen quadratischen Raum von unter sich gleichen Approximanten.

Betrachten wir jetzt irgend eine von unseren vier Linienarten. Wenn sie in keinen von den quadratischen Räumen eintritt, die zufällig in der Tabelle liegen, so werden alle Glieder, welche sie ausschneidet, ungleich sein, und wir haben genau wie im normalen Falle einen regulären Kettenbruch. Sollte sie indessen einen solchen Raum durchschneiden, so gelten die vorher im Normalfalle gemachten Untersuchungen nur vor dem Eintritt in den betreffenden Raum und nach dem Verlassen desselben. Dazwischen liegt eine Discontinuität. Wir können über dieselbe hinwegkommen, indem wir bemerken, dass das im Raume stehende Integral zu dem letzten auf der Linie vor dem Raume gefundenen Integral benachbart ist, ebenso zu dem ersten nach dem Raume. Man sieht sofort wie im normalen Falle. dass die Differenzen dieser Paare benach-

Tabelle III.

<table>
<tr><th></th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>0</td><td>$\int \frac{W^{(00)}_{r-2} \cdot (x_1\, dx_2)}{(x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1+1} (x_1 - e_2 x_2)^{-\lambda_2+1}}$</td><td>$\int \frac{W^{(01)}_{r-2} \cdot (x_1\, dx_2)}{(x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1} (x_1 - e_2 x_2)^{-\lambda_2+2}}$</td><td>$\int \frac{W^{(02)}_{r-2} \cdot (x_1\, dx_2)}{(x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1-1} (x_1 - e_2 x_2)^{-\lambda_2+3}}$</td><td>$\int \frac{W^{(03)}_{r-2} \cdot (x_1\, dx_2)}{(x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1-2} (x_1 - e_2 x_2)^{-\lambda_2+4}}$</td></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="3" colspan="3">$\int \frac{W_{r-4} \cdot (x_1\, dx_2)}{V^2 \cdot (x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1-2} (x_1 - e_2 x_2)^{-\lambda_2}}$</td><td>$\int \frac{W^{(13)}_{r-2} \cdot (x_1\, dx_2)}{V^2_{13} \cdot (x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1-3} (x_1 - e_2 x_2)^{-\lambda_2+3}}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\int \frac{W^{(23)}_{r-2} \cdot (x_1\, dx_2)}{V^2_{23} \cdot (x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1-4} (x_1 - e_2 x_2)^{-\lambda_2+2}}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\int \frac{W^{(33)}_{r-2} \cdot (x_1\, dx_2)}{V^2_{33} \cdot (x_1 - e_1 x_2)^{-\lambda_1-5} (x_1 - e_2 x_2)^{-\lambda_2+1}}$</td></tr>
</table>

barter Integrale und daher auch der entsprechenden Approximanten die auf S. 26 aufgestellte Form hat. In der That ist der dort angegebene Beweis nur dadurch zu modificieren, dass man in V_q und W_{r-2} Faktoren $x_1 - ex_2$ zulässt. Die Wiederholung der im normalen Falle danach folgenden Betrachtungen liefert dann den Satz:

Auch in anormalen Falle definiert irgend eine unserer vier Linienarten wie im Normalfalle eine Erzeugende der gesuchten Art, vorausgesetzt, dass wir bei einer Aufeinanderfolge von gleichen Elementen alle nach dem ersten weglassen.

Wir fragen nun zunächst nach der Form der Erzeugenden. Bis zu der Stelle, wo die Linie einem Raum von $(\omega + 1)^2$ gleichen Elementen begegnet und nach dem Verlassen desselben haben die μ und ν die schon angegebene reguläre Form. Wenn man von dem letzten vor dem Raume liegenden Quadrat zum ersten in demselben befindlichen übergeht, dann wächst die Ordnung der Approximation bei e_1 und der Exponent λ_1' stärker als gewöhnlich. Der Ueberschuss wird variieren, je nach der Lage des Quadrates, mit dem man in den Raum eintritt. Die hierbei auftretenden Irregularitäten der vier Typen von Kettenbrüchen werden wir gesondert betrachten.

Typus I.—Wir haben schon gesagt, dass der Diagonale eine Klasse von Approximanten entspricht. Es folgt daher aus der Umkehrung eines früheren Satzes Kap. I, A dass die Ordnung der Approximation beim Eintritt in den Raum um ω_1 mehr als gewöhnlich, nämlich um $\omega_1 + 2$ steigt, vorausgesetzt dass auf der Linie $\omega_1 + 1$ gleiche Elemente liegen. Beim Verlassen des Raumes steigt der Exponent λ_1' wieder um $\omega_1 + 2$. So geht z. B. die Diagonale in Tabelle III durch zwei Quadrate des Raumes, und der Zuwachs von λ_1' beim Betreten und Verlassen des Raumes ist 3. Entsprechend diesem Zuwachs müssen dann die beiden irregulären μ durch $(x_1 - e_1x_2)^{\omega_1+2}$ teilbar sein. Bezeichnet nun n' den Grad des letzten vor dem betreffenden Raume auftretenden N, so sind die Grade der nächsten drei ungleichen $n' + 1$, $n' + \omega_1 + 2$, $n' + \omega_1 + 3$. Die Gleichungen (3) zeigen, dass das dritte dieser vier N aus den beiden vorhergehenden durch Polynome μ und ν von den resp. Graden $\omega_1 + 2$ und $\omega_1 + 1$ und das letzte aus den beiden vorhergehenden durch Polynome μ und ν von den resp. Graden $\omega_1 + 2$ und 1 abgeleitet wird. Es folgt so: *Der irreguläre Teil des Kettenbruches hat die Form:*

$$\frac{(x_1 - e_1x_2)^{\omega_1+2}}{R_{\omega_1+1}(x_1, x_2)} \dotplus \frac{(x_1 - e_1x_2)^{\omega_1+2}}{ax_1 + bx_2} \dotplus \ldots\ldots,$$

wo R_{ω_1+1} eine ganze Form des durch den Index angegebenen Grades bezeichnet.

Typus II.—Die Vertikalreihe geht durch eine ganze Columne des Raumes, und λ_1', λ_2' erhalten beim Eintritt und Verlassen desselben die resp. Incremente $\omega'+1$, $\omega-\omega'+1$ und $\omega-\omega'+1$, $\omega'+1$, wo ω' einen von den Werten $\omega, \omega-1, \ldots. 0$ hat, jenachdem die Linie durch die 1ste, 2te, ... $(\omega+1)^{\text{ste}}$ Columne des Raumes geht. *Die Irregularität ist also, wie leicht zu sehen, durch das Schema gegeben:*

$$\dot{+}\frac{(x_1-e_1x_2)^{\omega'+1}(x_1-e_2x_2)^{\omega-\omega'+1}}{R_{\omega+1}(x_1, x_2)}\dot{+}\frac{(x_1-e_1x_2)^{\omega-\omega'+1}(x_1-e_2x_2)^{\omega'+1}}{ax_1+bx_2}\dot{+}$$

Dieser und der nächste Typus sind von besonderem Interesse, da in den Irregularitäten der Teilzähler, wie zu erwarten war, sowohl e_1 wie e_2 auftritt.

Typus III.—Die Irregularität ist von derselben Form wie beim Typus II. Wenn wir uns wie früher auf die erste Horizontallinie beschränken, dann ist $\omega'=\omega$.

Typus IV.—Die Treppenlinie schneidet immer eine ungerade Anzahl von gleichen Elementen in dem Raume aus, nämlich $2\omega'+1$, wo ω' dieselbe Bedeutung wie vorher hat. Die Irregularität kann daher entweder

$$\dot{+}\frac{(x_1-e_1x_2)^{\omega'+1}}{R_{\omega'+1}(x_1, x_2)}\dot{+}\frac{(x_1-e_1x_2)^{\omega'+1}}{a}\dot{+}$$

oder

$$\dot{+}\frac{(x_1-e_1x_2)^{\omega'+1}}{R_{\omega'}(x_1, x_2)}\dot{+}\frac{(x_1-e_1x_2)^{\omega'+1}}{a(x_1-e_2x_2)}\dot{+} \quad \text{sein.}$$

Wir werden nun einen irregulären Kettenbruch als Grenze eines regulären auffassen, von dem einige Näherungsbrüche im Begriffe sind, gleich zu werden. Die Ordnung der Irregularität werden wir als die um 1 verminderte Zahl der aufeinanderfolgenden gleichen Reste oder Approximanten definieren; mit anderen Worten, in den ersten drei Fällen als die halbe Summe der Ueberschüsse der Grade der beiden irregulären Teilzähler über den Normalfall, beim vierten Typus als die ganze Summe. Eine Grenze für die Ordnung der Irregularität kann man leicht ableiten. Die grösste Anzahl von Quadraten in einem Raum von $(\omega+1)^2$ gleichen Elementen, die irgend eine diagonale, horizontale oder vertikale Linie schneiden kann, ist $\omega+1$; die, welche eine Treppenlinie schneiden kann, $2\omega+1$. Die Zahl ω gab nun früher die Verminderung des Grades des W_{r-2} in den Zählern der gleichen Integralreste an. Diese kann natürlich nicht $r-2$ übersteigen. Wir schliessen daraus:

Prop. XVII.—*Die Ordnung einer Irregularität kann im Falle der drei ersten Typen nicht $r-2$, beim vierten nicht $2r-4$ übersteigen.*

Ein wichtiges Corollar dieses Satzes erhalten wir, wenn $r = 2$ ist und keine ganzzahligen Punkte vorhanden sind.

PROP. XVIII.—*Im hypergeometrischen Falle, wo die Anzahl der Verzweigungspunkte drei ist, muss die Tabelle normal sein, und es können keine Irregularitäten in dem Kettenbruche auftreten.*

Zum Schlusse dieses Kapitels wollen wir noch drei Bemerkungen, die sich auf die vorhergehenden Untersuchungen beziehen, hinzufügen.

Die erste Bemerkung bezieht sich auf eine Erweiterung der Tabelle für n Dimensionen. Wir haben die Gestalt des Raumes, der von den gleichen Elementen im Falle einer Irregularität eingenommen wird, für zwei Dimensionen gegeben. Die Diagonalen unseres quadratischen Raumes, längs deren λ_1' und λ_2' resp. constant waren, können wir als λ'-Coordinatenaxen ansehen. Wenn wir drei Coordinaten variieren lassen und die Integrale in eine räumliche Tabelle anordnen, wie wir es vorher in der Ebene gethan haben, so wird das Gebilde, welches die gleichen Elemente im Falle einer Irregularität enthält, ein reguläres Gebilde mit drei gleichen Diagonalen, d. h. ein Oktaeder sein. Im Falle von n Dimensionen haben wir in ähnlicher Weise ein reguläres Gebilde mit n gleich langen Diagonalen, die sich wechselseitig halbieren.

Zweitens kann man für *jede Funktion*, wie auch immer die Punkte e_1 und e_2 als zwei *nicht singuläre Punkte* angenommen sein mögen, eine Tabelle von rationalen Approximanten $\frac{Z_n}{N_n}$, jedoch ohne die Reste, wie auf S. 27 herstellen, und zwar mit der notwendigen Abgrenzung von quadratischen Räumen, wenn die Tabelle nicht normal sein sollte. Mit Hülfe eines Raisonnements, das sich wieder auf die ersten Glieder der Reihentwickelung bei e_1 und e_2 stützt, kann man dann wieder leicht beweisen, dass die verschiedenen Linien Kettenbrüche der oben angegebenen Formen ausschneiden.

Drittens ist es zur Vorbereitung für das nächste Kapitel und zum Vergleich mit den Arbeiten anderer wünschenswert die Typen I und IV in nicht-homogene Gestalt zu setzen. Zu diesem Zwecke wählt man im Falle des Typus I $e_1 = \infty$ als den Punkt, bei welchem man approximiert, und wir haben daher $x_1 - e_1 x_2$ durch eine Constante zu ersetzen und ferner $x_1 = x$, $x_2 = 1$ zu setzen. So erscheint der Kettenbruch in der Gestalt:

$$\dot{+} \frac{1}{a_{n-1}x + b_{n-1}} \dot{+} \frac{1}{a_n x + b_n} \dot{+} \, ;$$

die Irregularität in diese:

$$\frac{1}{R_{\omega'}(x)} \dotplus \frac{1}{ax+b}.$$

Die Relation (2) zwischen dem Fundamentalintegral, der n^{ten} Approximante und dem Rest kann dann in der Form geschrieben werden:

$$\frac{1}{(x-e_2)^{\lambda_2}\ldots(x-e_{r+1})^{\lambda_{r+1}}}\int\frac{W_{r-2}.dx}{(x-e_2)^{1-\lambda_2}\ldots(x-e_{r+1})^{1-\lambda_{r+1}}}$$
$$=\frac{Z_n}{N_n}+\frac{1}{(x-e_2)^{\lambda_2}\ldots(x-e_{r+1})^{\lambda_{r+1}}}\int\frac{W^{(n)}_{r-2}.dx}{(x-e_2)^{1-\lambda_2}\ldots(x-e_{r+1})^{1-\lambda_{r+1}}}.$$

In Typus IV andererseits approximiert man gewöhnlich bei $e_1=0$ und nimmt als Hülfspunkt $e_2=\infty$. Ein regulärer Kettenbruch transformiert sich dann in die Gestalt:

$$\dotplus\frac{x}{a_{n-1}}\dotplus\frac{x}{a_n}\dotplus,$$

die Irregularität in diese:

$$\frac{x^{\omega'+1}}{R_{\omega'+1}(x)}\dotplus\frac{x^{\omega'+1}}{a}$$

oder in

$$\frac{x^{\omega'+1}}{R_{\omega'}(x)}\dotplus\frac{x^{\omega'+1}}{a}.$$

Diese Modificationen haben Nachteile im Gefolge, von denen wir bei dieser Gelegenheit reden wollen. In der homogenen Gestalt des Typus I, II und IV—um uns der Kürze halber auf diese zu beschränken—zeigt sich das Anwachsen der Approximationsordnung direct in den Graden der Teilzähler. Um nämlich die Ordnung der Approximation bei e_1 oder e_2, die erhalten wird, wenn man den Kettenbruch bei einem gegebenen Teilbruch abbricht, zu finden, hat man nur die Grade der $x_1-e_1x_2$ und $x_1-e_2x_2$ in den Teilzählern zu summieren einschliesslich des ersten nach der Abbruchsstelle. Die homogene Schreibweise giebt ferner eine Probe für die Verträglichkeit der Grade von μ und ν durch die Recursionsformel (3) für die N. Dieser letzte Vorteil wird allemal aufgehoben, wenn man die nicht homogene Bezeichnungsweise einführt, ausserdem der erstere, wenn man als Approximationspunkt $e_1=\infty$ nimmt.—Wir bemerken ferner, dass oben beim Typus I der zweite Teilbruch im Falle einer Irregularität scheinbar zu dem regulären Teile des Kettenbruchs gehört. Die homogene Schreibweise zeigt aber, dass es nicht so ist.

Kapitel II.

HISTORISCHE BEMERKUNGEN.

(A). *Die Kettenbrüche.*

Es ist meine Absicht, in dem historischen Ueberblick, den das vorliegende Kapitel enthalten soll, systematisch die früher angestellten Untersuchungen zu besprechen, die sich auf die von uns behandelten Integrale und die Wurzeln der in ihnen auftretenden Polynome beziehen. Der letztere Gegenstand und ein oder zwei andere, welche wir berühren, beziehen sich, genau genommen, erst auf die folgenden Kapitel unserer eigenen Untersuchung, wir führen sie aber lieber hier als später an, um den historischen Bericht einheitlicher zu gestalten.

Die Approximierung der Integrale ist fast ausnahmlos mit Hülfe nicht-homogener Kettenbrüche *vom ersten Typus* bewerkstelligt worden, und *diese Art werden wir auch weiterhin immer meinen, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist. Ausserdem werden in diesem Kapitel und auch in den folgenden sämtliche* λ *und* e *als reell vorausgesetzt werden.*

Das erste Beispiel solcher Approximation scheint von Gauss* in seiner Abhandlung: „Methodus nova integralium valores" u. s. w. gegeben zu sein. Hier entwickelte er $\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$, welches man als $\frac{1}{x}F(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, x^{-2})$ oder als $-\int\frac{dx}{(x+1)(x-1)}$ schreiben kann, in einen Kettenbruch und zeigte, dass der Nenner irgend eines Annäherungsbruches und der entsprechende Rest, jetzt als Kugelfunktionen erster und zweiter Art bekannt, bis auf einen Faktor hypergeometrische Reihen seien. Heine† fügte dem hinzu, dass sie algebraische und transcendente Lösungen einer gemeinsamen Differentialgleichung seien. Die hypergeometrischen Bestandteile sind „verwandt," d. h. hypergeometrische Reihen $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, deren entsprechende drei Elemente sich nur um ganze Zahlen unterscheiden. Die Bedeutung dieser Thatsache ist durch die moderne Gruppentheorie zu Tage getreten, mit Hülfe deren man erkennt, dass die Kugelfunktionen erster und zweiter Art sämtlich Lösungen von Differentialgleichungen sind, die eine gemeinsame Gruppe besitzen.

Analoge Resultate wurden zunächst von Heine auf Jacobi's Veranlassung für $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ abgeleitet. Er entwickelte diese Funktion in Kettenbrüche

---

* Ges. Werke, Bd. III, S. 163, 1814.

† Crelle, Bd. 26, S. 192, 1843.

sowohl vom ersten* wie vom vierten† Typus. Bei der Betrachtung des ersten Typus ersetzte er $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ durch ein bestimmtes Integral zwischen zwei Verzweigungspunkten, welches wir nach Vertauschung von Argument und Parameter in folgendes unbestimmte verwandeln können:

$$\frac{1}{x^{1-\alpha}(x-1)^{1+\alpha-\gamma}}\int\frac{dx}{x^{\alpha}(x-1)^{\gamma-\alpha}},$$

oder in unserer Schreibweise:

$$\frac{1}{(x-e_1)^{\lambda_1}(x-e_2)^{\lambda_2}}\int\frac{dx}{(x-e_1)^{1-\lambda_1}(x-e_2)^{1-\lambda_2}}.$$

Wir werden uns die Freiheit nehmen, auch in Zukunft seine oder Heun's oder Humbert's Integrale ohne Weiteres in dieser Weise zu übersetzen, so weit dies notwendig scheint. In der That ist der Zusammenhang unseres Gegenstandes mit solchen bestimmten Integralen, so schön er sein mag, doch vielleicht mehr für ein zufälliges als für ein wesentliches Moment zu halten. Die Einführung bestimmter Integrale bringt übrigens eine notwendige Beschränkung auf Exponenten λ mit sich, die für sämtliche *endliche* Verzweigungspunkte kleiner als 1 sind. Herr Prof. Klein hat mich allerdings darauf aufmerksam gemacht, dass man diese Beschränkung aufheben kann, wenn man die Theorie der bestimmten Integrale durch Einführung der sogenannten „Doppelumläufe" erweitert. Sehen wir von dieser Beschränkung ab, so wird $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ das allgemeinste unserer Integrale darstellen, das *nur* drei Verzweigungspunkte (hier $0, 1, \infty$) besitzt. Wir haben diesen Fall schon *den hypergeometrischen Fall* unserer Integrale genannt; derselbe ist von besonderer Einfachheit, weil bei ihm keinerlei ganzzahlige Punkte ρ auftreten. Die Regularität des Kettenbruchs des ersten Typus zeigte sich in Heine's Arbeit; der Kettenbruch des vierten Typus ist ein specieller Fall von Gauss'‡ Kettenbruch für $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$. Man erhält ihn aus letzterem, wenn man $\beta = 0$ setzt und γ ersetzt durch $\gamma - 1$; er ist natürlich ebenfalls regulär.

Auch für die Behandlung der Kettenbrüche, zu deren Integralen vier oder mehr Verzweigungspunkte gehören, hat Heine§ den Weg gewiesen. Nachdem

* Monatsberichte der Berliner Akademie, 1866, oder Handbuch der Kugelfunktionen, Bd. I, S. 276.

† Handbuch, Bd. I, S. 275.

‡ „Disquisitiones generales circa seriem infinitam," Ges. Werke, Bd. III, S. 123, 1812.

§ Crelle, Bd. 60, S. 294, 1862.

er eine allgemeine Methode abgeleitet hat, um aus der Reihenentwickelung einer Funktion in der Umgebung des Punktes ∞ einen Kettenbruch vom ersten Typus, der in der Nähe desselben Punktes approximiert, zu finden, richtet er seine Aufmerksamkeit zuerst auf elliptische Integrale, speciell auf

$$\frac{1}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}\int\frac{W_1 . dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

und nachher auf eine Verallgemeinerung derselben, nämlich auf Ausdrücke der Gestalt

$$\frac{1}{\sqrt{(x-e_1)\ldots .(x-e_r)}}\int\frac{W_{r-2} . dx}{\sqrt{(x-e_1)\ldots .(x-e_r)}}.$$

Hier haben die Exponenten λ für die Punkte $e_1, \ldots . e_r$ alle den speciellen Wert $\frac{1}{2}$, während der Exponent für den Punkt ∞ den Wert $-\frac{r}{2}+1$ hat. Heine's Interesse concentriert sich auf die Beziehungen dieser Integrale zu den Lamé'schen Polynomen. Wenn die Constanten des zu der bei dem elliptischen Integrale auftretenden $W_1(x)$, d. h. die Lage des ganzzahligen Punktes so angenommen wird, dass eine Irregularität der ersten Ordnung an einer gegebenen Stelle des Kettenbruchs auftritt, dann wird der Nenner des Näherungsbruches, der durch Abbruch des Kettenbruches gerade vor der Irregularität erhalten wird, ein Lamé'sches Polynom sein. Umgekehrt ist jedes Lamé'sche Polynom in einem solchen Kettenbruch in der hiermit angegebenen Art enthalten. In gleicher Weise werden verallgemeinerte Lamé'sche Polynome durch das zweite Integral geliefert, wenn W_{r-2} solchen Bedingungen unterworfen wird, dass der zugehörige Kettenbruch an einer gegebenen Stelle eine Irregularität der $r-2^{\text{ten}}$ Ordnung besitzt. Man wird aus unserem Resultate, Prop. XVII, ersehen, wie dies Heine übrigens ausdrücklich für seinen Fall bemerkt, dass dies die *grösstmögliche* Irregularität ist. Man findet dementsprechend die Reste in der Form, wie sie Heine giebt. Für den zweiten Kettenbruch ist sie die folgende:

$$\frac{1}{\sqrt{(x-e_1)\ldots .(x-e_r)}}\int\frac{C . dx}{N_n^2 . \sqrt{(x-e_1)\ldots .(x-e_r)}},$$

wo C eine Constante bedeutet. Wie die Kugelfunktionen erster und zweiter Art zu $\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$ in Beziehung stehen, so sind die Polynome N_n und die Vielfachen derselben, die man durch Multiplication mit den entsprechenden Restintegralen erhält, mit den angegebenen Integralausdrücken verknüpft (vgl. S. 22).

Heun* und Humbert† wandten zunächst Heine's Methode auf den Kettenbruch für

$$\frac{1}{(x-e_1)^{\lambda_1}\dots\dots(x-e_r)^{\lambda_r}}\int\frac{W_{r-2}.dx}{(x-e_1)^{1-\lambda_1}\dots\dots(x-e_r)^{1-\lambda_r}}$$

an. Die Wichtigkeit, die Heun's Resultate für die Theorie unserer Integrale, sowohl hier wie an anderen Stellen, besitzen, wird später ersichtlich sein. Hier indessen ist zu bemerken, dass Heun die Beschränkung nicht beachtet, die ihm durch Verwandlung der Funktion in die Summe bestimmter Integrale auferlegt wird, nämlich dass die λ für alle im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkte kleiner als 1 sein sollten. Trotzdem reichen seine Resultate weiter als diejenigen Humbert's. Wenn wir die in Rede stehende Beschränkung hinzufügen, so können wir sie folgendermaassen zusammenfassen: Sei eine reguläre Differentialgleichung gegeben:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1-\lambda_1}{x-e_1}\dots\dots+\frac{1-\lambda_r}{x-e_r}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{W'_{r-2}(x)}{(x-e_1)\dots\dots(x-e_r)}y=0,$$

in der die λ und e reell und die λ algebraisch kleiner als 1 sind, und seien die Constanten in W'_{r-2} (d. h. *die accessorischen Parameter*) so auf alle mögliche Weise bestimmt, dass eine Lösung der Differentialgleichung ein Polynom ist. Dann kann jede von diesen Lösungen als Nenner des Näherungsbruches angesehen werden, der einer grössten Irregularität in der Kettenbruchentwickelung für

$$\frac{1}{(x-e_1)^{\lambda_1}\dots\dots(x-e_r)^{\lambda_r}}\int\frac{W_{r-2}.dx}{(x-e_1)^{1-\lambda_1}\dots\dots(x-e_r)^{1-\lambda_r}}$$

entspricht, vorausgesetzt dass die Coefficienten von W_{r-2} entsprechend richtig bestimmt sind. Dabei wird eine transcendente Lösung der Differentialgleichung durch das Produkt des Polynoms N_n in das Integral $\int\frac{C.dx}{N_n^2.(x-e_1)^{1-\lambda_1}\dots\dots(x-e_r)^{1-\lambda_r}}$ vorgestellt werden.

Man wird bemerken, dass bei diesen Untersuchungen ein einzelnes Irregularitätspolynom und der einzelne entsprechende Rest die ganze Aufmerksamkeit absorbiert haben. Ein entschiedener Fortschritt wurde in zwei Abhandlungen von Heine‡ und Heun§ gemacht. In beiden beschränkten die Autoren allerdings ihr Interesse auf das Integral:

$$\frac{1}{(x-e_1)^{\pm\frac{1}{2}}\dots\dots(x-e_3)^{\pm\frac{1}{2}}}\int\frac{W_1.dx}{(x-e_1)^{1\mp\frac{1}{2}}\dots\dots(x-e_3)^{1\mp\frac{1}{2}}}$$

* Math. Ann., Bd. 30, 1887. † Journal de l'école polytechnique, tome 29, cahier 48, 1880.

‡ Monatsberichte der Berliner Akademie, 1866, oder Handbuch der Kugelfunktionen, Bd. 1, S. 294.

§ Math. Ann., Bd. 33, 1888, „Beiträge zur Theorie der Lamé'schen Funktionen."

und dessen Beziehung zu den Lamé'schen Polynomen. In der ersten dieser beiden Abhandlungen wurde indessen zuerst eine Reihe von Integralen $\int \frac{W_1^{(n)}.dx}{N_n^2.(x-e_1)^{1\mp\frac{1}{2}}\ldots.(x-e_3)^{1\mp\frac{1}{2}}}$ durch die successiven Reste zusammengekettet. Es war das specielle Verdienst Heun's, *die Gruppeneigenschaften des Kettenbruchs* entdeckt zu haben, indem er dieselben an den Kugelfunktionen bemerkte. In ähnlicher Weise hat er für die hier auftretenden N_n gezeigt, dass *sie Differentialgleichungen mit einer gemeinsamen Gruppe genügen.* Dabei bestimmt im Falle der Kugelfunktionen der $\log\frac{x+1}{x-1}$ durch die Gleichung

$$R_n = \tfrac{1}{2} N_n \log\frac{x+1}{x-1} - Z_n$$

und im vorliegenden Falle das elliptische Integral durch die entsprechende Gleichung die Periodicitätsmoduln der Gruppe, und *die Recursionsformeln zwischen drei successiven Näherungsnennern sind als Formeln zwischen drei gleichgruppigen Funktionen aufzufassen.* So ist, wie Heun sagt, der Kettenbruch nicht ein zufälliges Moment der Theorie, sondern er bestimmt beides, die Gleichheit der Gruppe und die Beziehungen zwischen gleichgruppigen Funktionen.

Was wir im ersten Kapitel gewonnen haben, wird jetzt ersichtlich sein. Anstatt eines einzelnen Kettenbruches, d. h. einer Kette von verwandten Integralen mit nicht mehr als $r-2$ ganzzahligen Punkten, fanden wir eine mehrfach unendliche Gesamtheit von solchen. Von Anfang an waren alle Beschränkungen betreffs der Realität der λ, W, und e aufgehoben. Durch die Gesamtheit der so gewonnenen Approximanten oder Reste hindurch können wir allerlei Arten von Ketten verfolgen. Insbesondere haben wir nicht nur Kettenbrüche einer einzelnen Art sondern vier verschiedene Typen untersucht, welche im normalen Falle regulär waren, während andere, wenn sie auch nicht selbst regulär waren, doch an ein bestimmtes Gesetz gebunden waren. Dabei ist eine gleichzeitige Approximation in der Nähe von zwei oder mehr Verzweigungspunkten eingeführt. Von den Irregularitätspolynomen, für welche die oben erwähnten Autoren sich interessieren, haben wir gesehen, dass sie nicht nur in einer einzelnen Kette, sondern in allen, welche einen bestimmten quadratischen Raum durchziehen, auftreten. Die Grenze für die Ordnung, sowie die Art der Irregularitäten wurde klar gestellt.* Endlich ist das zufällige Element, das

* Heun's Beweis in der letztgenannten Abhandlung, dass der Kettenbruch hinter der Irregularität, welche ein Lamé'sches Polynom bestimmt, durchaus regulär verlaufen muss, scheint mir nicht richtig. Ueberdies

durch die Kettenbrüche und die Approximation eingeführt war, dadurch eliminiert, dass man die Gesamtheit aller Integrale in's Auge fasste, die durch gewisse Gruppeneigenschaften charakterisiert sind.

Wir wollen den vorstehenden Bericht nicht schliessen, ohne vorher die Dissertation von M. H. Padé zu erwähnen, deren Anregung und Hülfe der Verfasser dankbar anerkennt und die er besonders dem Leser empfiehlt. Dieselbe bezieht sich auf Approximation im Allgemeinen. Padé* betrachtet, wie es Frobenius† vor ihm gethan, die Approximation irgend einer Funktion vermittelst rationaler Funktionen $\frac{U_p}{V_q}$ in der Nähe *eines nicht-singulären* Punktes, den er ohne Verlust der Allgemeinheit als $x = 0$ nimmt. Die entstehenden Funktionen $\frac{U_p}{V_q}$ ordnet er nach den Werten von p und q in eine Tabelle an. Bei dieser Classification ist implicite ein zweiter Punkt (nämlich bei Padé der ∞ ferne Punkt) bevorzugt, was Padé allerdings nicht erwähnt. Dies wird evident, wenn man seine rationalen Näherungsfunktionen $\frac{U_p(x)}{V_q(x)}$ in die Gestalt $\frac{U_p(x_1, x_2)}{V_q(x_1, x_2)} x_2^{q-p}$ setzt. In Bezug auf die beiden Punkte werden drei Klassen von regulären Kettenbrüchen unterschieden, nur ist die Rolle des zweiten Punktes hier unter dem Schleier der nichthomogenen Schreibweise verborgen. *Von gleichzeitiger Approximation in der Nähe des zweiten Punktes $x = \infty$ kann man indess in keiner Weise sprechen,* da die Eigenschaften der Reste dort unbekannt sind. Wir haben weiter zu bemerken, dass Padé's Resultate nicht *in toto* auf unsere Tabelle der $\frac{Z_n}{N_n}$, der rationalen Bestandteile der Approximanten, angewandt werden können, da die Construktion seiner und unserer Tabelle unterhalb der Hauptdiagonale auf ganz verschiedenen Principien beruht.

Beispiele von Approximation einer Funktion in zwei Punkten findet man in einer Arbeit von Hurwitz,‡ aber dieselben haben gar keine Beziehung zu unseren

---

citiert er Heine falsch, indem er behauptet, dass nach Heine der Kettenbruch bis zu diesem Punkte regulär wäre. Was Heun wirklich ausführt, ist, dass er die Form des Kettenbruches an denjenigen Stellen festlegt, wo eine Irregularität der ersten Ordnung nicht auftritt, in dem er dieselbe regulär findet. Alles dies indessen hatte Heine bereits vorher bewiesen, vgl. Crelle, Bd. 60, S. 297, 1861.

* Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles, 1892; Paris, Gauthier Villars.

† Crelle, Bd. 90, 1879.

‡ Math. Ann., Bd. 38, 1891.

Integralen. Dasselbe gilt von einer Arbeit Schering's,* die sich mit der Approximation in beliebig vielen Punkten für Funktionen, die nach Potenzen von Polynomen entwickelbar sind, beschäftigt.

(B). *Die Wurzeln der Polynome.*

Zu Anfang sei hier erwähnt, was wir im ersten Kapitel näher auseinander gesetzt haben, dass dieselben Verzweigungspunkte irgend einem unserer Integrale und der Differentialgleichung für das in dem Integral auftretende Polynom gemeinsam sind. Die Frage nach der Lage der Wurzeln eines Polynoms gegen die Verzweigungspunkte kann demnach auf verschiedene Weise angegriffen werden, entweder vermittelst eines Kettenbruchs, in welchem man das Polynom einschalten kann, oder direct von der Differentialgleichung aus oder durch specielle Methoden. In allen Untersuchungen über diese Frage werden alle λ und e als reell angenommen.

Der hypergeometrische Fall dreier Verzweigungspunkte $r = 2$ hat näturlich immer besonderes Interesse erregt. Schon früh† hat man bemerkt, dass die Wurzeln der Kugelfunktionen erster Art alle reell seien und zwischen den beiden Verzweigungspunkten $+1$ und -1 liegen. Viel später entdeckte man, dass in ähnlicher Weise die Wurzeln der Näherungsnenner des Kettenbruches vom ersten Typus für $\frac{1}{(x-e_1)^{\lambda_1}(x-e_2)^{\lambda_2}}\int\frac{dx}{(x-e_1)^{1-\lambda_1}(x-e_2)^{1-\lambda_2}}$ zwischen seinen endlichen Verzweigungspunkten e_1 und e_2 liegen, so lange λ_1, λ_2 algebraisch kleiner als 1 sind. Erst in den letzten Jahren indessen erhielt man eine vollständige Lösung für irgend welche reelle Werte von λ_1, λ_2. Hilbert‡ bestimmte nämlich die Zahl der imaginären Wurzeln, während die geometrischen Methoden von Klein§ weiter reichten und auch die Verteilung der reellen Wurzeln zwischen den drei Verzweigungspunkten zu finden gestatteten.

Der erste Satz, der einen Fall mit mehr als drei Verzweigungspunkten betraf, scheint von Liouville|| betreffs der verallgemeinerten Lamé'schen Poly-

* „Das Anschliessen einer Funktion an algebraische Funktionen in unendlich vielen Stellen." Abhandlg. der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 26, 1876.

† Legendre, Memoires de l'Academie de Paris, 1784. Vgl. Heine, Handbuch, Bd. I, S. 23.

‡ Crelle, Bd. 103, 1887. Vgl. auch Stieltjes, Comptes Rendus, Bd. 100, 1883.

§ Math. Ann., Bd. 37, 1890, „Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihen." Man vergl. auch seine Vorlesungen 1890–91. Vgl. ferner Hurwitz, Math. Ann., Bd. 38, 1891.

|| Jour. de Math., t. 11, 1846, „Lettres sur diverses questions d'analyse" u. s. w. adressées à M. P. H. Planquet. Deuxième lettre, p. 261.

nome gegeben zu sein. Diese, wie wir hier vorweg bemerken, sind alle reell, d. h. Polynome mit bloss reellen Coefficienten. Nun bewies er, dass ihre Wurzeln, *so weit* sie reell sind, zwischen den beiden äussersten endlichen Verzweigungspunkten der zugehörigen Differentialgleichungen liegen. Dies ergänzte Heine,* indem er zeigte, dass die Wurzeln alle reell sind. Dann zeigte Humbert,† indem er Heine's Methode benutzte, dass genau dasselbe nicht nur für ein Lamé'sches Polynom, sondern auch für irgend eins, das einer Maximalirregularität des Kettenbruchs

$$\frac{1}{(x-e_1)^{\lambda_1}\ldots.(x-e_r)^{\lambda_r}}\int\frac{W_{r-2}\,.\,dx}{(x-e_1)^{1-\lambda_1}\ldots.(x-e_r)^{1-\lambda_r}}$$

entspricht, gilt, vorausgesetzt dass $\lambda_1, \ldots. \lambda_r$ alle kleiner als eins sind.

Inzwischen hatte Heine‡ einen sehr wichtigen Satz für die Theorie unserer Polynome aufgestellt. Möge eine Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1-\lambda_1}{x-e_1}+\ldots.+\frac{1-\lambda_r}{x-e_r}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{Ax^{r-2}+Bx^{r-3}+\ldots.}{(x-e_1)\ldots.(x-e_r)}\,y=0$$

vorgelegt sein mit irgend wie gegebenen reellen oder imaginären Werten von e und λ. Dann lässt sie

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots.(n+r-2)}{1\,.\,2\ldots.(r-2)}\,.$$

Bestimmungen der accessorischen Parameter A, B, ... zu, so dass eine Lösung ein Polynom vom n^{ten} Grade wird. In dem gewöhnlich betrachteten Falle, in welchem die λ und e reell sind, sind die Polynome selbst reell. Einige Zeit nachher bemerkte Klein,§ dass diese Zahl mit der Anzahl der verschiedenen Verteilungen von n ungleichen Dingen auf $r-1$ Plätze identisch ist, und wies durch Continuitäts-Betrachtungen nach, dass für gegebene $e_1, \ldots. e_r$ jedes verallgemeinerte Lamé'sche Polynom vom Grade n eine verschiedene Verteilung seiner n Wurzeln auf die $r-1$ Segmente e_1e_2, e_2e_3, ... $e_{r-1}e_r$ zwischen den endlichen Verzweigungspunkten aufweist. Endlich verallgemeinerte Stieltjes‖ den Satz, indem er bewies, dass derselbe für die Verteilung der Wurzeln der Polynome bei gegebenen *reellen* e und λ allemal gelte, falls nur die $\lambda_1, \ldots. \lambda_r$

* Hd. Kugelfunktionen, Bd. I, S. 382–4.

† Jour. de l'école polytechnique, tome 29, cahier 48, 1880.

‡ Monatsberichte der Berliner Akademie, 1864.

§ Math. Ann., Bd. 18, 1881.

‖ Acta Math., VI, 1884.

kleiner als 1 seien. Dieselbe Beschränkung trafen wir oben in Humbert's Satz, wo nur bewiesen war, dass die Wurzeln zwischen e_1 und e_r liegen. Der Fortschritt ist derselbe wie derjenige Klein's gegenüber Heine im Lamé'schen Falle; man lernt nämlich, dass diese verschiedenen Polynome verschiedene Wurzelverteilungen repräsentieren.

Die zuletzt angeführten Sätze gehen übrigens über das hinaus, was wir später benutzen werden. Wir werden deshalb keine Gelegenheit haben, auf sie zurückzukommen, und wir haben sie nur der Vollständigkeit halber hier angeführt.

Es scheint kaum nötig zu bemerken, dass diese Sätze, abgesehen vom Falle dreier Verzweigungspunkte $r = 2$, nur eine sehr beschränkte Auskunft über die V_q unserer Integrale geben, nämlich nur für diejenigen, die einer grösstmöglichen Irregularität in den Integralen entsprechen. Sätze von allgemeiner Anwendbarkeit scheinen nicht zu existieren.* In dem einzigen Falle indessen, wo $r = 3$ ist und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ kleiner als 1 genommen werden, kann der Kettenbruch, (wenn man ihn wie gewöhnlich vom ersten Typus und in Bezug auf $e_{r+1} = \infty$ nimmt), nach Vertauschung von Argument und Parameter im Fundamentalintegral $\int \frac{W_1 . dx}{(x - e_1)^{1-\lambda_1} \dots (x - e_3)^{1-\lambda_3}}$ als specieller Fall eines von Markoff† betrachteten Kettenbruchs angesehen werden. Es folgt dann aus der Arbeit des letzteren, dass die Wurzeln aller Näherungsnenner reell sind und alle ausser etwa einer einzigen zwischen e_1 und e_3 liegen. Ein Beispiel zur Anwendung dieses Satzes liefert der oben von uns betrachtete Kettenbruch im Falle eines gewöhnlichen Lamé'schen Polynoms.

Im letzten Kapitel werde ich zu den Wurzeln der Polynome zurückkehren. Wenn auch meine Sätze, ebenso wie die Markoff'schen nicht befriedigend sind hinsichtlich ihrer Vollständigkeit, so habe ich doch einige Einsicht in die Wurzeln anderer als der Irregularitätspolynome gewinnen können und zwar durch geometrische Methoden, durch welche sich auch die früher bekannten, eben recapitulierten Resultate betreffs der Irregularitätspolynome leicht ergeben.

---

* Heun giebt in seiner Göttinger Inauguraldissertation 1880 allerdings einen allgemeinen Satz sowohl für die Realität wie für die Trennung der Wurzeln. Der Beweis ist indess inkorrekt, indem er viel zu viel beweist. Er bemerkt nicht, dass die Coefficienten der höchsten Potenz in seinen Polynomen nicht notwendig positiv sind; infolgedessen sind aber seine Sturm'schen Reihen fehlerhaft.

† Math. Ann., Bd. 27, 1885. Erste Note.

Die gegenseitige Trennung der Wurzeln von benachbarten Polynomen V_q habe ich ebenfalls behandelt. Das einzige frühere Resultat, das mir bezüglich dieses Gegenstandes bekannt war, ist das für den hypergeometrischen Fall $r = 2$ unter der gewöhnlichen Beschränkung, dass λ_1, λ_2 kleiner als 1 seien.* Betrachtet man die Kettenbruchentwickelung für das Integral

$$\frac{1}{(x-e_1)^{\lambda_1}(x-e_2)^{\lambda_2}}\int\frac{dx}{(x-e_1)^{1-\lambda_1}(x-e_2)^{1-\lambda_2}},$$

so sagt jenes Resultat aus, dass sich einerseits die Wurzeln zweier successiver Näherungsnenner und andererseits die Wurzeln des Zählers und Nenners ein- und desselben Näherungsbruches wechselseitig in dem zwischen den endlichen Verzweigungspunkten e_1 und e_2 gelegenen Segmente trennen. Dies ist nur ein specieller Fall eines weit allgemeineren Theorems für den Fall $r = 2$ (vgl. Prop. XXIV), das wir später geben werden.

KAPITEL III.

GEOMETRISCHE GRUNDLAGE.

Die Methode, auf welche sich die geometrische Behandlung unseres Gegenstandes in den folgenden Kapiteln gründet, ist die der „conformen Abbildung." Das specifische Problem, auf das wir hier unsere Aufmerksamkeit zu lenken haben, ist die Abbildung eines einfach zusammenhängenden geradlinigen Polygones auf eine Halbebene, die in solcher Weise erfolgen soll, dass jedem Punkte des Polygons ein und nur ein Punkt der Halbebene entspricht. Dabei soll dem Rande des Polygons der Rand der Halbebene entsprechen, und die Conformität der Abbildung soll nur in bestimmten Punkten innerhalb oder auf der Grenze aufhören. Dass diese specielle Abbildung möglich ist und also eine analytische Funktion definiert, entspricht einer bekannten Behauptung von Riemann, ist aber zuerst von Weierstrass bewiesen worden, wie in einer Abhandlung von Schwarz† mitgeteilt ist. Die Funktion ist in soweit willkürlich, als sie drei Parameter enthält. Diese sind indessen vollständig bestimmt, sobald man verlangt, dass drei Punkte auf dem Rande des Polygons drei bestimmten Punkten auf dem Rande der Halbebene entsprechen. Die nähere Untersuchung dieser Funktion gründet sich bei Schwarz auf das sogenannte

---

* Gegenbauer, Wiener Berichte, Bd. 84, Ab. 2, S. 1102.

† Crelle, Bd. 70, 1869, „Ueber einige Abbildungsaufgaben," oder Ges. Werke, Bd. 2, S. 65; vgl. insbesondere S. 77.

„Symmetrieprincip," das in speciellen Fällen schon früher bei Riemann* in seiner Untersuchung über Minimalflächen hervorgetreten war. Nehmen wir in unserem Polygon irgend einen Punkt und ein Paar rechtwinkliger Axen durch denselben, auf welche wir die Polygonpunkte durch die complexe Variabele η beziehen. Mögen die entsprechenden Punkte der Halbebene, auf welche wir unser Polygon abbilden, mit x bezeichnet werden. Wir denken uns diese Halbebene durch die Axe der reellen Zahlen begrenzt und nehmen an, dass die Werte von x innerhalb unserer Halbebene einen positiven imaginären Bestandteil haben. Wir werden kurz von einer positiven Halbebene x sprechen. Durch die Abbildung wird η als eine Funktion von x, $\eta(x)$, definiert. Möge jetzt das Polygon an einer seiner Seiten gespiegelt werden, und bezeichne $\eta'(x)$ die Funktion, welche das Spiegelbild auf die negative Halbebene x abbildet. Das Symmetrieprincip behauptet dann, dass die zweite Funktion $\eta'(x)$ nur die analytische Fortsetzung der ersten $\eta(x)$ ist. Die beiden Polygone zusammen geben also einen vollständigen Zweig der Funktion. Die anderen Zweige, die den Umläufen von x um die Verzweigungspunkte der Funktion entsprechen, kann man dadurch erhalten, dass man das Doppelpolygon an allen seinen Seiten spiegelt, dann wieder die Spiegelbilder an den ihrigen und so fort *ad infinitum*. Schwarz bestimmte von hier aus die Form der Funktion $\eta(x)$. Ehe indess seine Abhandlung erschien, hat Christoffel† das bezügliche Resultat schon für den Fall eines Polygons gegeben, das nicht durch das Unendliche geht, keine Windungspunkte in seinem Innern enthält und einblättrig ist, d. h. sich nirgends selbst überdeckt. Die Conformität der Abbildung kann in einem solchen Falle nur in den Ecken $E_1, \ldots . E_{r+1}$ des Polygons aufhören. Bezeichne man mit $e_1, \ldots . e_{r+1}$ die entsprechenden reellen Verzweigungspunkte auf der Grenze der Halbebene, mit $\lambda_1\pi, \ldots . \lambda_{r+1}\pi$ die Winkel des Polygons, so dass

$$\Sigma\lambda = r - 1.$$

Die λ messen ersichtlich die Abweichung von der Conformität. Werfen wir e_{r+1} noch in den Unendlichkeitspunkt der x-Ebene, so haben wir nach Schwarz und Christoffel in diesem Falle:

$$\eta(x) = \int \frac{dx}{(x-e_1)^{1-\lambda_1} \ldots . (x-e_r)^{1-\lambda_r}}.$$

* „Ueber die Fläche von kleinsten Inhalt," u. s. w, 1866, Ges. Werke, S. 297.

† Annali di Matematica, Bd. 1, S. 97, 1867.

Schwarz bemerkt des Weiteren, dass sein Beweis auch auf solche Polygone anwendbar ist, die durch das Unendliche ziehen oder Windungspunkte im Innern besitzen, und schliesst die Untersuchung über diese Frage mit einem Beispiel für die ersteren ab. Weiterhin gab noch Schlaefli* einen analytischen Beweis für die Möglichkeit der Abbildung im allgemeinen Falle. Endlich verdanken wir es Klein,† dass er die in's Unendliche laufenden Polygone nach ihrer wirklichen Gestalt auffasste und dadurch den Allgemeinverlauf der entsprechenden Funktionen bestimmte. Klein beginnt mit der Betrachtung der Kreisbogendreiecke und ihrer Beziehung zur hypergeometrischen Reihe und geht dann zu den Kreisbogen- und geradlinigen Polygonen mit einer beliebigen Seitenzahl über. Im Verfolg dieser Methode ist die Gestalt der geradlinigen Polygone neuerdings von Schoenflies‡ sehr ausführlich behandelt worden. Die Erläuterungen, welche ich hierüber folgen lasse, sind in freier Form den von Klein in den Jahren 1890–91 gehaltenen Vorlesungen entnommen.

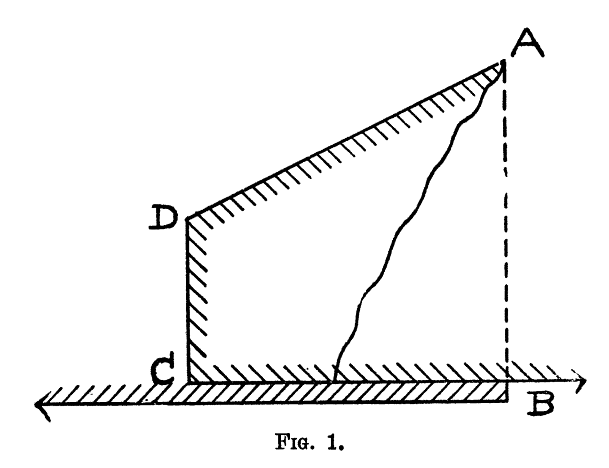


FIG. 1.

Um eine etwas bestimmtere Idee von Polygonen zu erhalten, die sich in's Unendliche erstrecken, wollen wir einige der einfachsten construieren. Man lege irgend ein gewöhnliches Polygon, z. B. ein Viereck $ABCD$ so auf eine Halbebene, dass eine Seite, z. B. CB längs der Grenze der Halbebene liegt, und mache dann von einer der gegenüberliegenden Ecken, sagen wir von A aus, nach der Seite hin denselben Schnitt in Polygon und Halbebene. Verbindet man dann die

* Crelle, Bd. 78, 1873.

† Vgl. Math. Ann., Bd. 37, 1890, sowie Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen von 1890–91.

‡ Göttinger Nachrichten, April, 1892. (Vgl. auch das eben erscheinende Heft 42, 3- der Mathematischen Annalen.)

Teile des Polygons rechts und links vom Schnitte mit den auf der anderen Seite liegenden Teilen der Halbebene, so wird man eine continuirliche begrenzte Oberfläche, also ein Polygon erhalten. Es ist hierbei gleichgültig, ob die Teile so vereinigt werden, dass sie längs des Schnittes sich kreuzen, wie es oft zwei Blätter einer Riemann'schen Fläche thun, oder ob sie einfach über einander liegen, indem vor der Vereinigung ein Teil des Polygons oberhalb, der andere unterhalb der Halbebene gelegen ist. In Fig. 1 deutet die Punktierung den letzteren Fall an. Die Schraffierung bezeichnet das Innere des neu entstandenen Polygons, wobei die über einander gelegenen Teile der Seite CB neben einander gezeichnet sind. Die Aufeinanderfolge der Polygonpunkte wird in beiden Fällen dieselbe sein und deshalb auch die Funktion, die durch seine Abbildung auf eine Halbebene definiert ist. Man wird bemerkt haben, dass der Winkel A

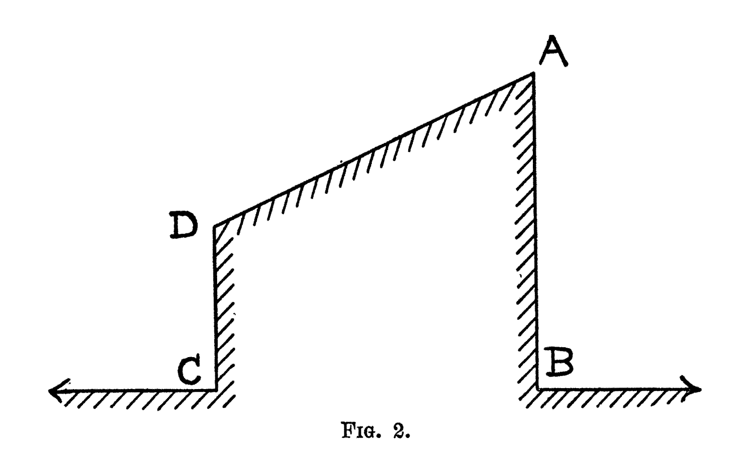


Fig. 2.

bei diesem Process um 2π gewachsen ist und dass er sich in Folge dessen selbst überschlägt. Ueberdies hat man die Seite BC durch's Unendliche gehen lassen, indem sie sich ebenfalls wegen der angehängten Grenze der Halbebene teilweise selbst überdeckt. In dem vervollständigten Polygone könnte man wieder eine Halbebene von A aus an die gegenüberliegende Seite anheften und so fort, indem man den Winkel zugleich mit der Seite sich so oft überschlagen lässt, wie man will. Diesen Process nennt Klein *die polare Anhängung von Halbebenen.* Eine andere Methode Halbebenen hinzuzufügen, wird von ihm als *die laterale Anhängung* bezeichnet. Man heftet einfach längs einer Seite eines Polygons eine Halbebene so an, dass die Fläche continuirlich wird. So erhalten wir aus unserem Viereck durch Anhängung längs CB, Fig. 2. Die Seite CB geht

dadurch in ihr durch das Unendliche gehendes Complement über, und die Winkel C und B wachsen um π. Eine zweite Anhängung längs derselben Seite führt CB zu dem ursprünglichen Abschnitt zurück, während die Winkel C und B im Ganzen um einen vollen Umlauf gewachsen sind. Dasselbe Polygon könnte man direct aus dem einfachen Polygon, von dem wir ausgingen,

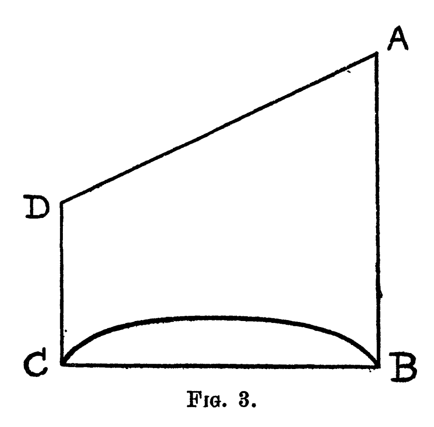


FIG. 3.

erzeugen, indem man in ihm einen Schnitt von C nach B zieht (Fig. 3). Dann müsste man in einer Vollebene einen genau gleichen Schnitt machen, die Schnitte über einander legen und die linke Seite der einen Figur, Polygon oder Vollebene, mit der rechten der anderen verbinden. Diesen Process nennt Klein *die diagonale Anhängung einer Vollebene.* Er kann in gleicher Weise längs eines Schnittes angewandt werden, der von irgend welcher Polygonecke zu einer anderen hinläuft. Die Hinzufügung einer Vollebene vermehrt zwei Winkel, jeden um 2π. Diese Processe können eine beliebige Anzahl von Malen wiederholt und combiniert werden. Die Bedingungen für die Processe* sind

(a) für laterale Anhängung, dass sich die Seite nicht überschlägt;

(b) für polare und diagonale Anhängung, dass der Schnitt durchaus in einer Ebene liegt und weder sich noch irgend einen anderen Schnitt schneidet; ausserdem

(c) für poláre Anhängung, dass der Schnitt nicht über die Verlängerung der Seite, nach welcher er gezogen ist, hinweggeht.

Aber nicht alle Polygone, deren Seite oder Fläche durch das Unendliche zieht, können durch Hinzufügung von Halb- oder Vollebenen erhalten werden.

* Vgl. die schon genannte Abhandlung von Schönflies.

Wenn z. B. ein Polygon aus einer Vollebene ausgeschnitten wird, so ist der Rest ein Polygon, dessen Fläche durch das Unendliche zieht (Fig. 4). Ferner giebt in Fig. 5 so wohl der schraffierte wie der unschraffierte Teil ein Beispiel, wo eine Seite durch das Unendliche geht und doch weder sie selbst noch ein Winkel sich überschlägt.

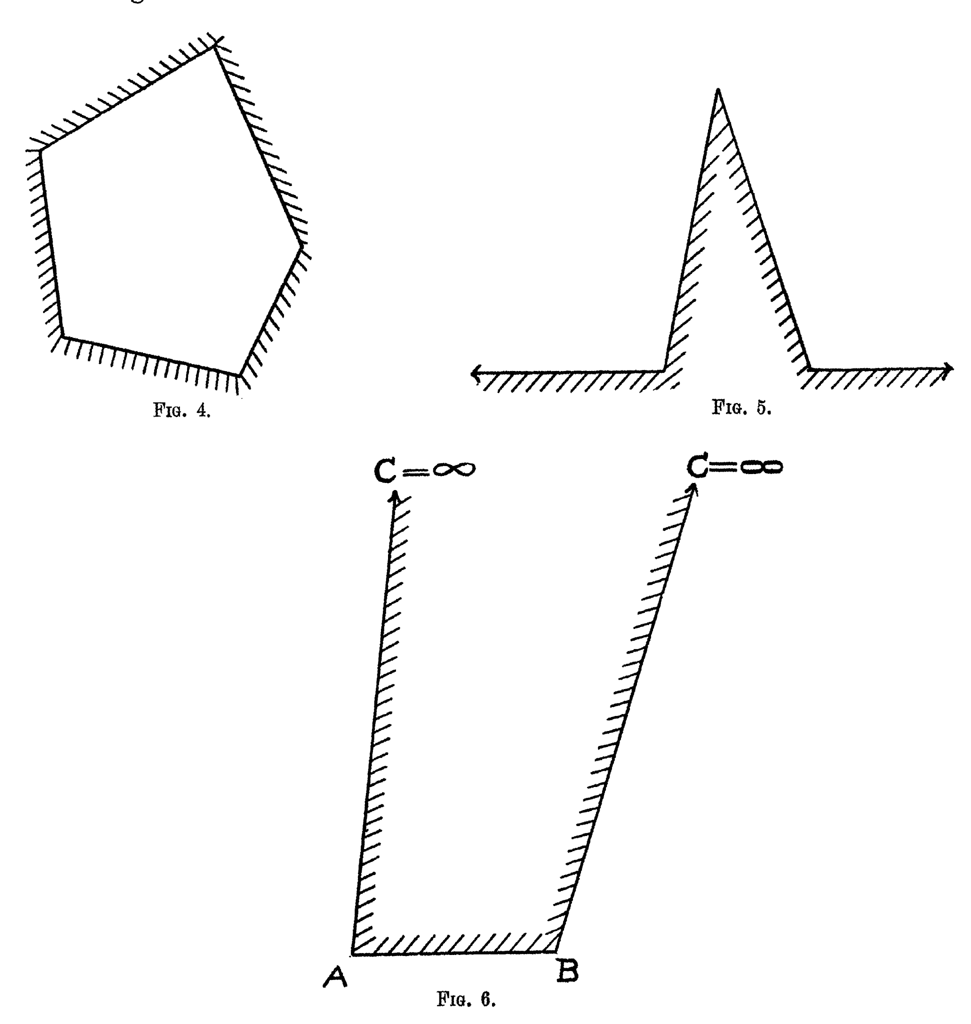


Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

Andere Möglichkeiten, die für unsere Polygone sich bieten, sind die, wo eine oder mehrere Ecken im Unendlichen liegen. So mögen, um ein einfachstes Beispiel anzuführen, in einem gewöhnlichen Dreieck ABC zwei Seiten, AC und

BC um A und B als Centren in entgegensetzter Richtung rotieren. Der Punkt C rückt dann nach dem Unendlichem zu, bis der Winkel dort Null wird und AC mit BC parallel ist. Wenn die Rotation einer der beiden Seiten noch weiter fortgesetzt wird, dann bleibt die Ecke C im Unendlichen (Fig. 6) und der Winkel muss nach unserer Auffassung sich noch weiter vermindern, d. h. negativ werden. Fig. 7 giebt ein anderes Beispiel, wo zwei successive Ecken E_3, E_4 im Unendlichen liegen. Weitere Beispiele über die Besonderheiten von Polygonen, die durch das Unendliche ziehen, brauchen nicht angeführt zu werden, da die eben gemachten Ausführungen für unseren Zweck genügen; bezüglich näherer Ausführungen müssen wir den Leser auf die oben citierte Abhandlung von Schönflies verweisen.

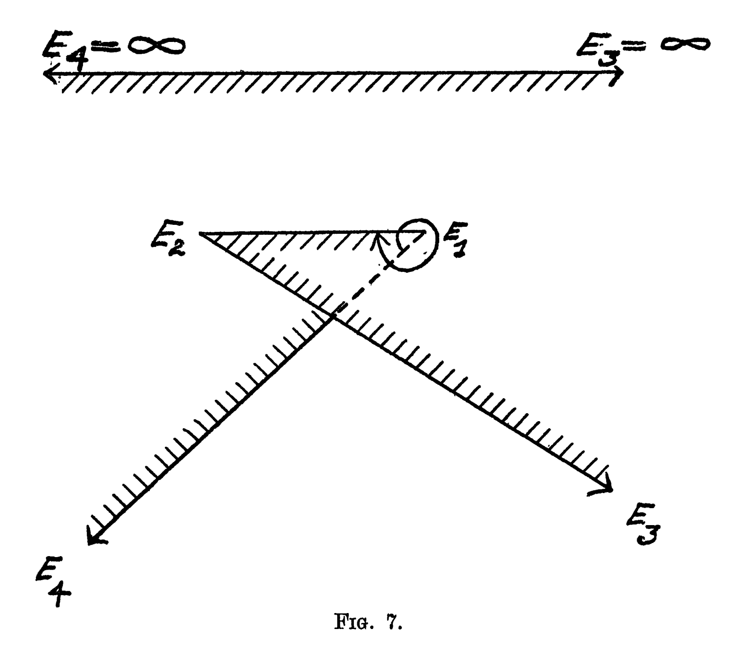


Fig. 7.

Es erübrigt noch, die Form von $\eta(x)$ so zu erweitern, dass sie auch den Fall von Polygonen der eben betrachteten Art einschliesst. So oft der Unendlichkeitspunkt η auf einer Polygonseite liegt, liegt ein entsprechender reeller Wert x auf der Grenze der Halbebene; wenn der Unendlichkeitspunkt auf einem Blatte innerhalb des Polygons liegt, so liegt das entsprechende x im Inneren der Halbebene, ist also imaginär. Irgend ein Spiegelbild des Polygons wird den conjugierten Wert von x als einen anderen Unendlichkeitspunkt für die Funktion $\eta(x)$ liefern. Möge $V(x) = 0$ die Gleichung sein, deren Wurzeln

alle diese Punkte x einschliessen. Die durch das Polygon definierte Funktion unterscheidet sich dann von dem obigen Integral nur dadurch, dass im Nenner des Integrals noch V^2 steht und dass *negative* λ vorhanden sind, *die von den Ecken im Unendlichen stammen.* Dass entsprechend dem Wurzel von $V=0$ das Polygon schlicht durch das Unendliche zieht, erkennt man am besten durch stereographische Projection der Ebene auf die Kugel. Diese Wurzeln sind daher für die conforme Abbildung nicht eigentlich singuläre Punkte und können darum keine Veranlassung zu logarithmischen Gliedern in den Reihentwickelungen des Integrals geben. Der Zusammenhang dieses V mit den Unendlichkeitstellen des Polygons ist bereits in den Vorlesungen von Klein hervorgetreten. Insbesondere kann aus der Gestalt des Polygons die Lage der Wurzeln des Polynoms V unmittelbar abgelesen werden. *Wenn die Seite* E_iE_{i+1} *des Polygons n-mal durch das Unendliche geht, so hat das Polynom n reelle Wurzeln zwischen* e_i *und* e_{i+1}; *wenn die Fläche n-mal durch das Unendliche geht, hat das Polynom n Paare imaginärer Wurzeln und umgekehrt.*

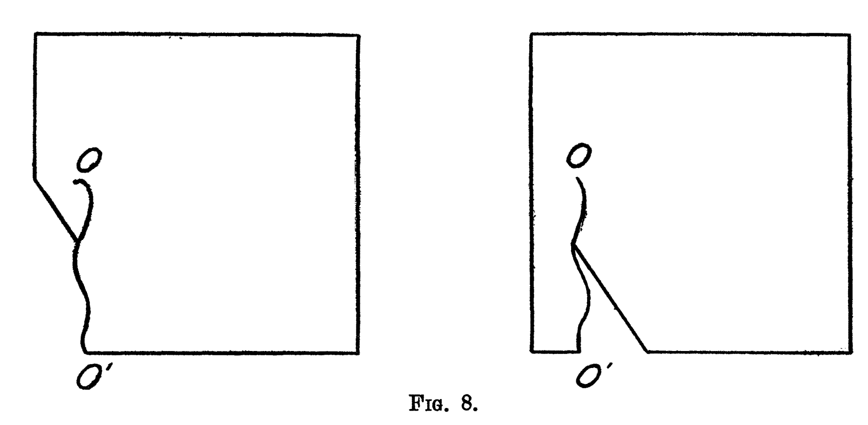


Fig. 8.

Allgemeinere Polygone als diese Klein'schen kann man erhalten, wenn man Windungspunkte im Innern zulässt. In der That ist dies der allgemeinste Typus von einfach zusammenhängenden geradlinigen Polygonen. Ein Beispiel erhält man, wenn man eine Vollebene an eins der früheren Polygone längs eines Schnittes zwischen einer Ecke und einem inneren Punkte oder zwischen zwei inneren Punkten desselben Blattes anhängt. Um einen inneren Anhängungspunkt werden zwei Blätter cyclisch wie bei einer Riemann'schen Fläche zusammenhängen. Ein anderes Beispiel von ganz anderer Natur bekommt man durch Ueberlagerung der beiden Teile von Fig. 8, die man so statt-

finden lässt, dass die gleichen Schnitte OO' zusammenfallen. Die beiden Teile sind dann so zu verbinden, dass je ein rechts von dem einen Schnitt gelegener mit dem links von dem anderen gelegenen zusammenhängt. Das entstehende Polygon hat einen Windungspunkt bei O. Wenn man einen von diesen Windungspunkten umkreisen will, so muss man einen doppelten Umlauf machen, ehe man zum Ausgangspunkte zurückkehrt. In der x-Halbebene wird zu gleicher Zeit wegen der Beziehung der x und η zu einander ein einfacher Umlauf um einen Punkt ρ beschrieben werden. ρ muss infolgedessen ein Verzweigungspunkt sein, dessen Verzweigungsexponent 2 ist. Windungspunkte höherer Ordnung, wo mehr als zwei Blätter zusammenhängen, entsprechen in gleicher Weise positiven ganzzahligen Exponenten. Da man sie durch die Vereinigung von zwei oder mehr *einfachen* Windungspunkten entstehen lassen kann, so ist es erlaubt, die entsprechenden Verzweigungspunkte als eine Verschmelzung mehrerer ρ anzusehen. Es wird deshalb genügend sein, die Punkte ρ allein zu betrachten. Mit jedem ρ der positiven Halbebene x müssen wir aus Symmetriegründen den conjugierten Wert als einen Verzweigungspunkt der Funktion $\eta(x)$ zusammennehmen.

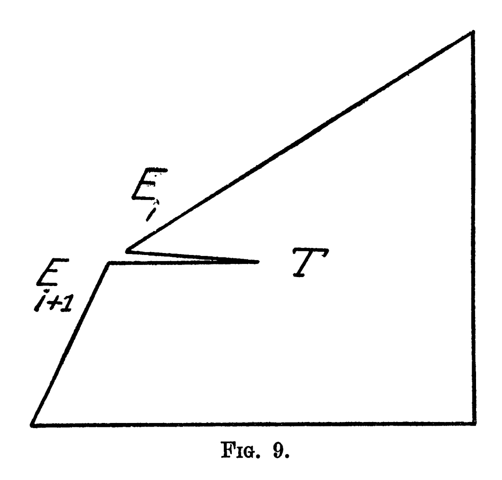


Fig. 9.

Aber diese sind nicht die einzigen Verzweigungspunkte mit Exponenten $+2$. Es können nämlich Ecken am Polygon auftreten, in denen die Richtung einer Seite sich umkehrt wie bei T, Fig. 9. Die entsprechenden Punkte ρ sind reell und besitzen die Exponenten 2. Solche Ecken werden wir *einfache Wendepunkte* nennen. Ecken, deren Winkel positive ganzzahlige Vielfache von π sind, können als Wendepunkte höherer Ordnung aufgefasst werden, in denen eine Seite mehrere Male ihre Richtung umkehrt; man kann sie ebenfalls durch

Vereinigung mehrerer einfacher Wendepunkte entstehen lassen. Diese Wendepunkte sind nur äusserlich von den gerade besprochenen Windungspunkten verschieden. Um die Aehnlichkeit hervortreten zu lassen, spiegele man das Polygon in Fig. 9 an der Seite $E_i T E_{i+1}$. In dem vereinigten Polygon, welches einen einzelnen Zweig der Funktion $\eta(x)$ darstellt, verschwindet diese Seite gänzlich aus der Grenze (Fig. 10). Zu gleicher Zeit wird T von der Grenze abge-

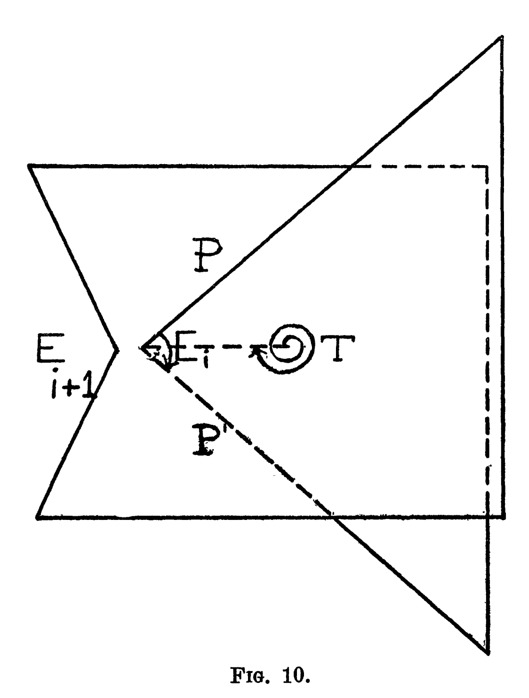


Fig. 10.

trennt und wird ein innerer einfacher Windungspunkt. Entsprechend einem einzelnen Zweige von $\eta(x)$ hat man natürlich die x-Ebene in geeigneter Weise so zu zerschneiden, dass $\eta(x)$ einwertig in ihr ist. In Fig. 10 muss man die Ebene längs der reellen Axe mit Auslassung des Segmentes $e_i \rho e_{i+1}$ zerschneiden. Der Punkt ρ erscheint dann wie die imaginären Punkte im Innern der zerschnittenen Ebene, und es entspricht ihm ein Windungspunkt.

Die ganzzahligen Punkte ρ, von denen wir gesprochen haben, spielen, wie wir in den folgenden Kapiteln nachweisen werden, eine ganz andere Rolle als alle anderen Verzweigungspunkte. Man kann sie vorteilhafter Weise, wie die nichtsingulären Unendlichkeitspunkte in Klein's Polynom, zu Wurzeln eines *reellen* Polynoms $W(x)$, d. h. eines Polynoms mit reellen Coefficienten, zusammenfassen.

Wir haben so durch Beispiele die Besonderheiten des geradlinigen Polygons klar gemacht, die für das Folgende wesentlich sind. Wir werden jetzt die durch die Untersuchungen von Weierstrass und Schwarz bestimmte Form der zugehörigen Funktion geben und sie als Basis der nachfolgenden Untersuchungen in den Vordergrund rücken. Wir haben:

PROP. XIX.—*Die Abbildung irgend eines einfach zusammenhängenden geradlinigen Polygons auf eine Halbebene x wird mit Hülfe eines Integrals*

$$\eta = \int \frac{W.(x_1\,dx_2)}{V^2.(x_1 - e_1x_2)^{1-\lambda_1}\dots(x_1 - e_{r+1}x_2)^{1-\lambda_{r+1}}}$$

geleistet, wo W und V reelle Formen in x_1, x_2 sind und die Wurzeln von V einfache Unendlichkeitsstellen des Integrals sind. Jeder reellen Wurzel von W entspricht ein Wendepunkt, jedem Paar imaginärer Wurzeln ein Windungspunkt des Polygons.

Umgekehrt ist es auch richtig, dass irgend ein solches Integral, sofern natürlich die e und λ reell angenommen sind, die Halbebene auf ein geradliniges Polygon der von uns betrachteten Art abbildet.

Es mag hier bemerkt werden, dass, obwohl nach unserer Voraussetzung alle Faktoren mit positiven ganzzahligen λ aus dem Nenner fortgenommen und in W aufgenommen waren, dies nicht notwendig ist, und dass irgend ein solcher Faktor im Nenner zurückbehalten werden kann, wenn es gewünscht wird. Wir werden indessen übereinkommen, dass die Faktoren nur dann zurückbehalten werden sollen, wenn die ganzzahligen Punkte, die ihnen entsprechen, eine andere Rolle spielen als die anderen, nämlich zu den e gerechnet werden.

Die Gestalt der Funktion war, wie wir schon lernten, eine Folge ihrer Gruppeneigenschaft. Man darf dementsprechend erwarten, dass die Gruppeneigenschaft in der geometrischen Gestalt des Polygons hervortritt. Hierzu wollen wir zu unserem Doppelpolygon in Fig. 10 zurückkehren. Die η-Punkte P und P', welche Spiegelbilder von einander sind, entsprechen demselben Punkt P'' der Grenze der zerschnittenen x-Ebene, den man sich aber zweimal an entgegengesetzten Seiten dieser Grenze zu denken hat. Die Art der Zerschneidung zeigt ferner, dass die beiden η-Punkte bei einem Umlauf des x um den Verzweigungspunkt e_i aus einander hervorgehen. Geometrisch wird P' in P einfach durch eine Drehung um E_i um den Winkel $2\lambda_i\pi$ übergeführt. Entsprechend dem Umlauf um e_i haben wir deshalb die Substitution

$$(\eta' - E_i) = e^{2i\pi\lambda_i}\,(\eta - E_i)$$

oder kurz

$$\eta' = e^{2i\pi\lambda_i}\,\eta + b.$$

Im Falle die Ecke E_i im Unendlichen liegt, findet die Rotation um E_i' statt, den im Endlichen gelegenen Schnittpunkt der beiden Grenzlinien, die in E_i zusammen treffen; wenn diese indessen parallel sind, so reduciert sich die Rotation auf eine einfache Translation $\eta' = \eta + b$. Auf diese Weise erhält man sämtliche erzeugenden Substitutionen der Gruppe und findet, dass dieselben durch die Winkel $\lambda\pi$ und die Ecken des einfachen (nicht doppelten) Polygons, oder falls zwei successive Grenzlinien parallel sind, durch den Abstand $\frac{1}{2}b$ derselben charakterisiert sind.

Es wird sich noch grössere Einfachheit und Eleganz zeigen, wenn wir, wie bei der Abbildung selbst, das einfache Polygon anstatt des doppelten als Substrat für die Gruppe brauchen. In diesem Falle muss die bislang betrachtete Gruppe so erweitert werden, dass sie die Operation der Spiegelung des einfachen Polygons an seinen Seiten enthält. Auf diese Weise werden zwei Punkte des Doppelpolygons, die Spiegelbilder von einander sind, *äquivalent in Bezug auf die erweiterte Gruppe.* Aus diesen Punkten werden alle anderen äquivalenten Punkte, wie man leicht einsieht, durch die Substitutionen der Originalgruppe erhalten. Wählen wir jetzt eine der Seiten des einfachen Polygons als reelle η-Axe. Eine Spiegelung in Bezug auf diese Seite wird dann durch die Formel

$$\eta' = \bar{\eta}$$

dargestellt, wo $\bar{\eta}$ mit η conjugiert ist. Wir haben daher den Satz:

Prop. XX.—*Die Substitutionen der erweiterten Gruppe werden durch Combination der Substitutionen*

$$\eta' = \bar{\eta},$$
$$\eta' = e^{2i\pi\lambda_i}\,\eta + b$$

erhalten.

Wir bemerken ferner, dass es nur einen einzigen festen Punkt in Bezug auf die Gruppe giebt, nämlich den ∞ fernen Punkt. Dies folgt aus den letzten Gleichungen, aber man sieht es auch an den Polygonen. Bei jeder Spiegelung bleiben nur diejenigen Punkte der η-Ebene unverändert, die auf der Spiegelungslinie liegen, und der einzige Punkt, der allen Spiegelungslinien gemeinsam ist, ist der ∞ ferne Punkt.

KAPITEL IV.

DIE VERWANDTEN POLYGONE.

Wir haben im letzten Kapitel die geometrische Interpretation eines Integrals discutiert. Wir haben jetzt die Resultate für die Gesamtheit der verwandten Integrale $\int \frac{W_{r-2} \cdot (x_1 dx_2)}{V_q^2 . \Pi (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda'_i}}$ anzuwenden. Jedes von diesen kann durch ein geradliniges Polygon mit $r+1$ Seiten repräsentiert werden, dessen successive Ecken $E'_1, \ldots . E'_{r+1}$ den gemeinsamen Verzweigungspunkten $e_1, \ldots . e_{r+1}$ entsprechen. Ausser diesen besitzt jedes Polygon so viele Windungspunkte als Paare imaginärer Wurzeln, so viele Wendepunkte als reelle Wurzeln von $W_{r-2} = 0$ vorhanden sind. Die Summe der Winkel E' in einem Polygon ist durch die Formel

$$\Sigma \lambda' \pi = (2q+1) \pi$$

gegeben. Sollte einer der $r-2$ Windungs- und Wendepunkte durch Zusammenfallen mit den E' verschwinden, so muss die Formel entsprechend modificiert werden. Wir kommen auf solche Irregularitäten später zurück.

Die Verwandtschaft unserer Polygone kommt jetzt in einer bemerkenswerten Weise geometrisch zum Ausdruck, wie wir nachweisen wollen. Wir haben nämlich folgenden Satz:

PROP. XXI.—*Die verwandten Polygone sind alle durch dieselben geraden Linien begrenzt.*

Dieser Satz wurde für die Polygone, die der Lamé'schen Differentialgleichung entsprechen, durch Prof. Klein in seinen Vorlesungen von 1890–91 aufgestellt. Es kann aus der Gleichung (2) bewiesen werden, aber seine Richtigkeit ist viel leichter mit Hülfe der erzeugenden Substitutionen der erweiterten Gruppe einzusehen. Diese müssen den Sätzen XIII und XX entsprechend für alle Polygone dieselben sein. Also müssen auch die Linien, an denen gespiegelt wird, für alle dieselben sein. Aber diese sind die Grenzlinien unserer Polygone, und deshalb ist unser Satz bewiesen.

Wir sind jetzt in der Lage, die Rolle der ganzzahligen Punkte zu untersuchen, die bisher scheinbar ohne bestimmten Grund in unseren Untersuchungen aufgetreten sind. Unsere verwandten Integrale waren dadurch definiert, dass sie dieselbe Gruppe und dieselben Verzweigungspunkte e besitzen, deren Um-

kreisung die Gruppe erzeugt. Soll man nun zunächst Polygone construieren, zu denen eine gemeinsame Gruppe gehört, so ist es nur nötig, diejenigen auszuwählen, welche von denselben Geraden begrenzt sind und deren Winkel beziehungsweise einander Modulo π congruent sind. Aber die Lage der Verzweigungspunkte, welche bei der Abbildung in der x-Ebene den Ecken E entsprechen, wird im Allgemeinen für jedes so construierte Polygon verschieden sein. Um verwandte Integrale zu erhalten, müssen wir solche Polygone finden, die ein gemeinsames System der e liefern. Durch eine lineare Substitution

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}$$

ist es stets möglich, drei der e in drei auf der reellen x-Axe beliebig gegebene feste Punkte zu verlegen. Die übrigen $r - 2$ Punkte e, oder, wie man noch besser sagen kann, die $r - 2$ Doppelverhältnisse der e sind die wesentlichen Parameter der Gruppe irgend eines Polygons. Um ihnen bestimmte Werte zu geben, muss man der Gestalt des Polygons $r - 2$ Bedingungen auferlegen können. Die einzigen continuirlich variabelen Data, die zu unserer Verfügung stehen, sind aber die Lagen der Windungs- und Wendepunkte. Es folgt daraus, dass ihre Anzahl so beschaffen sein muss, dass sie $r - 2$ Parameter liefert. Jeder Windungspunkt hat zwei Grade der Freiheit innerhalb des Polygons und liefert daher ein Paar conjugierter ρ als variabele Parameter des Integrals. Jeder Wendepunkt ist auf einen Grad der Freiheit durch seine Bewegung längs der Grenze beschränkt und liefert deshalb nur einen reellen Parameter ρ. Liefert uns so das Polygon $r - 2$ Grössen ρ, so müssen diese so lange variiert werden, bis die e die vorgeschriebene Lage einnehmen. *So wird durch das Vorhandensein der ρ oder der entsprechenden Wende- und Windungspunkte erreicht, dass die Integrale, resp. Polygone verwandt sind.*

Nichts verbietet natürlich, dass in speciellen Fällen die ρ (oder einige derselben) mit Punkten e zusammenfallen. Fälle der Art haben wir schon in Kapitel I getroffen. Würden mehr als $r - 2$ Parameter vom Polygon geliefert werden, so hätte man mehr als die notwendige Anzahl zur Verfügung, und es kann dann im Allgemeinen eine unendliche anstatt einer endlichen Zahl von unseren Polygonen mit vorgeschriebenen Winkeln E' und gegebenen Grenzlinien construiert werden. Daher kam es, dass es zwecks ein deutiger Bestimmung von η durch die λ' nötig war, die Anzahl der ganzzahligen Punkte auf $r - 2$ zu beschränken.

Einige unserer früher für die verwandten Integrale erhaltenen Resultate können jetzt in's Geometrische übersetzt werden. So haben wir zum Beispiel gelernt, dass irgend eins der Integrale immer gleich die Gesamtheit aller verwandten Integrale bestimmt. Dies sieht man eben so gut geometrisch ein. Irgend ein Polygon bestimmt durch seine Abbildung auf die Halbebene x die Verzweigungspunkte e, von welchen die Gruppe abhängt; durch die Lage und gegenseitige Neigung der successiven Grenzlinien bestimmt es die Substitutionen, welche die Gruppe ausmachen. Weiter aber gibt Prop. VIII das höchst wichtige Resultat, dass unter allen verwandten Polygonen, die $r - 2$ ganzzahlige Punkte oder weniger besitzen, *eins und nur eins mit einem gegebenen System von Winkeln gefunden werden kann.* Bei der Auslegung dieses Satzes muss man indessen Vorsicht gebrauchen. Falls nämlich Windungs- oder Wendepunkte mit Polygonecken zusammenfallen, giebt es, genau genommen, kein Polygon mit den gewünschten Winkeln. Es ist in ein anderes von einfacherer Gestalt mit abgeänderten Winkeln ausgeartet.

Das zuletzt ausgesprochene wichtige Theorem dürfte kaum leicht geometrisch zu beweisen sein. Aus diesem Grunde begannen wir mit der analytischen Discussion und gingen dann zur geometrischen über, anstatt den umgekehrten Weg zu nehmen. Im letzten Falle würde man damit beginnen, verwandte Polygone als solche zu definieren, die, von denselben geraden Linien begrenzt, Modulo π resp. congruente Winkel besitzen und durch ihre Abbildung dieselben Verzweigungspunkte e liefern. Man würde darauf auf die Integralform der entsprechenden Funktion η, die Existenz einer gemeinsamen Gruppe und die algebraische Form der Differenz irgend zweier der Funktionen schliessen. Dann folgt aus dem Beweise von Prop. X, dass für ein gegebenes System der λ' höchstens ein Polygon und Integral existiert unter der Beschränkung, dass nur $r-2$ ganzzahlige Punkte vorhanden sind. Wenn ferner die Approximanten und Kettenbrüche gesucht werden, so hat man unter der unendlichen Schaar der so construierten Polygone ein geeignetes Polygon mit keinen Unendlichkeitspunkten im Innern oder auf den Seiten als Fundamentalpolygon auszuwählen, mit dem man dann die anderen vergleichen wird. Die Differenzen der bezüglichen η sind die Approximanten. Schliesslich hat man daraus Tabellen und Kettenbrüche zu machen. Bei diesem letzten Schritte bietet sich die einzige ernsthafte Schwierigkeit. Um eine vollständige Tabelle ohne Lücken zu erhalten, hat man sich von der wirklichen Existenz eines vollständigen Systems von Polygonen zu über-

zeugen. Die Mannigfaltigkeit der geometrischen Gestalten ist aber so gross, dass es sehr schwierig ist, die Gestalt desjenigen Polygons, welches gegebenen Werten der λ' bei gegebenen e entspricht, völlig festzulegen. Durch unseren analytischen Ansatz haben wir betreffs der Existenz und eindeutiger Bestimmtheit dieses Polygons eine absolute Sicherheit gewonnen.

Wir richten jetzt unsere Aufmerksamkeit auf die wirkliche Construction der verwandten Polygone. Das Problem ist also folgendes: *Es ist ein einzelnes von ihnen gegeben; alle anderen zu construieren, welche nicht mehr als* $r - 2$ *ganzzahlige Punkte besitzen.* Zu diesem Zwecke ist ein Kenntniss der Realität und Verteilung der ganzzahligen Punkte und der Wurzeln des jedem Polygon entsprechenden V erforderlich, wie wir umgekehrt, wenn die Polygone gegeben sind, die letzteren Data ableiten können. Um die Untersuchung systematisch zu betreiben, ist in erster Linie eine ordentliche Anordnung unentbehrlich, und diese haben wir in den Tabellen des Kapitels I gegeben, wo nur zwei Exponenten, d. h. Winkel, zu gleicher Zeit abgeändert werden. In den Tabellen hatten wir gewisse Linien oder Erzeugende gezogen, mit deren Hülfe irgend ein Element erreicht werden konnte. Unser Problem vereinfacht sich so auf die Construction einfacher Serien von Polygonen, in denen ein oder zwei Winkel successive gleiche Incremente erhalten. In Teil (A) dieses Kapitels werden wir den hypergeometrischen Fall $r = 2$ erledigen, in Teil (B) die Natur und Schwierigkeit der höheren Fälle berühren. Obwohl wir keine vollständige Lösung unseres Problems geben, können wir trotzdem wichtige Folgerungen aus der Betrachtung der Polygone ziehen, und diese werden wir im letzten Kapitel angeben.

(A). *Der hypergeometrische Fall.*

Hier bietet sich die grosse Vereinfachung, dass keine Windungs- und Wendepunkte vorhanden sind und dass die verwandten Polygone Dreiecke sind, d. h. Polygone, von denen jedes durch seine Winkel allein charakterisiert ist. Wenn die Grenzlinien und Winkel irgend eines dieser Dreiecke vorgeschrieben sind, ist seine Construction völlig bestimmt. Bevor wir indessen zu einer allgemeinen Discussion übergehen, werden wir uns mit dem allgemeinen Charakter unseres Problems bekannt machen, indem wir vorläufig ein Paar wohlbekannte und einfache Kettenbrüche betrachten.

(1). Gauss' Kettenbruch (Typus I),

$$-\tfrac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}=\int\frac{dx}{(x+1)(x-1)}=\frac{Z_n}{N_n}+\int\frac{dx}{N_n^2(x+1)(x-1)}.$$

Wie man bei diesem bemerkenswerten Kettenbruch erwarten konnte, besitzen auch die zugehörigen Dreiecke einen sehr einfachen Charakter. Ihre drei gemeinsamen Ecken entsprechen $e_1=-1$, $e_2=+1$, $e_3=\infty$. Für alle Integrale sind λ_1' und λ_2' Null, und deshalb liegen die Ecken E_1 und E_2 im Unendlichen. Im Fundamentalintegral ist $\lambda_3=1$, und der Winkel bei E_3 im Fundamentaldreieck ist deshalb π. Die Gestalt dieses Dreiecks ist in Fig. 11

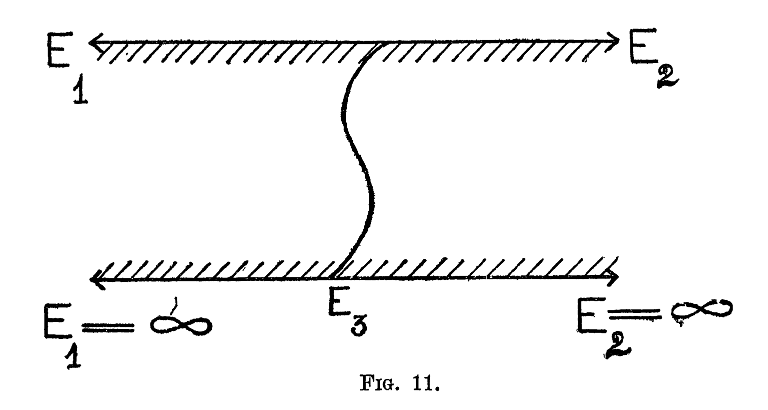


FIG. 11.

gegeben. Zur Rechten und Linken von E_3 liegen Teile zweier logarithmischen Streifen, die resp. $\log(x+1)$ und $\log(x-1)$ entsprechen. Bei jedem successiven Rest, wächst der Exponent λ_3' für $e_3=\infty$ um 2, und deshalb wächst in der Reihe der Polygone der Winkel E_3 successive um 2π. Um dies zu erreichen, hat man nach einander Halbebenen längs eines Schnittes von E_3 nach der gegenüberliegenden Seite polar anzuhängen, wobei dann diese Seite sich entsprechend oft überschlägt. Die nach Prop. XIV für die N_n gebildeten Differentialgleichungen zeigen, dass die N_n Kugelfunktionen erster Art sind. Die Lage ihrer Wurzeln kann sogleich aus den Dreiecken abgelesen werden. Jede Anhängung einer Halbebene veranlasst die Seite E_1E_2 ein Mal mehr durch das Unendliche zu gehen. Man schliesst daraus, dass die Wurzeln der successiven Kugelfunktionen reell sind und zwischen $e_1=-1$ und $e_2=+1$ liegen.

(2). $$\log\frac{x+1}{x-1}=\int\frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}(y-1)}=\frac{Z_n}{N_n}y^{\frac{1}{2}}+\int\frac{dy}{N_n^2y^{\frac{1}{2}}(y-1)},$$

wo
$$y = x^2,$$
$$e_1 = 0, \quad e_2 = 1, \quad e_3 = \infty,$$
$$\lambda_1' = \tfrac{1}{2}, \quad \lambda_2' = 0, \quad \lambda_3' = \tfrac{1}{2} + 2n.$$

Das Fundamentaldreieck hat die in Fig. 12 gezeichnete Gestalt, aus der man die

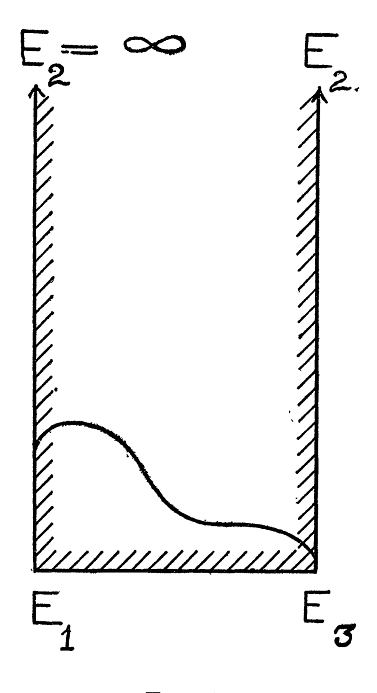


Fig. 12.

der folgenden wieder durch successive polare Anhängung von Halbebenen von E_3 aus erhält. Die Differentialgleichungen für die N_n zeigen, dass letztere die hypergeometrischen Reihen,

$$x^{2n} F\left(-n, \, -n - \tfrac{1}{2}, \, -2n - \tfrac{1}{2}, \, \frac{1}{x^2}\right) \text{ sind.}$$

Dies Resultat ist von Heine* mit Hülfe bestimmter Integrale abgeleitet worden. Vermöge unserer Untersuchung erhalten wir auch noch die Form der Reste und erkennen, dass die Wurzeln der N_n zwischen $e_1 = 0$ und $e_2 = 1$ liegen.

* Handbuch, Bd. I, S. 276.

Der eben betrachtete Kettenbruch liefert, beiläufig bemerkt, eine viel schnellere Approximation für $\log \frac{x+1}{x-1}$ als die vorhergehende, indem er nach Potenzen von x^2 statt von x fortschreitet.

Wir wenden uns jetzt zu der allgemeinen Discussion. Wir haben die verschiedenen Typen von erzeugenden Funktionen zu interpretieren. Jeder dieser Typen ist regulär, und es sind, wie wir wissen, reguläre Erzeugende für irgend welche Werte von r durch eine constante Veränderung eines oder zweier λ' beim Uebergang von einem Rest zum nächsten charakterisiert. Das geometrische Aequivalent ist *eine reguläre Zunahme der entsprechenden Winkel an den Punkten, wo approximiert wird.* So muss in Typus I immer ein einzelner Winkel von Polygon zu Polygon um 2π wachsen; in Typus II müssen zwei Winkel je um π wachsen; in Typus III muss einer um π zunehmen, ein anderer um π abnehmen; in Typus IV endlich muss ein Winkel um π wachsen, während ein anderer abwechselnd um den gleichen Betrag ab- und zunimmt, indem er zwischen zwei Werten hin- und herschwankt. Die allgemeine Regel ist: wenn ein Winkel eines Dreiecks den entsprechenden im Fundamentaldreieck um $m\pi$ übertrifft, wo m positiv ist, so zeigt das an, dass die zugehörige Approximante von der Ordnung m approximiert.

Für jeden Typus muss unsere erste Operation in der Construction des zum Integral $\int \frac{(x_1\, dx_2)}{(x_1 - e_1x_2)^{1-\lambda_1} \ldots (x_1 - e_3x_2)^{1-\lambda_3}}$ gehörigen Fundamentaldreieckes bestehen, für welches $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ist. Wir werden vorläufig $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ voraussetzen. Es werden dann drei Arten von Fundamentaldreiecken zu unterscheiden sein:

(1) keins der λ negativ,
(2) λ_3 allein negativ,
(3) λ_3 und λ_2 negativ.

Im ersten Falle ist das Dreieck von der gewöhnlichen Gestalt, und *laterale oder polare Anhängung kann an jeder Seite, die man auswählen mag, stattfinden.*

Aus diesem Dreieck kann man das für den zweiten Fall gültige dadurch erhalten, dass man E_1E_3 und E_2E_3 in bestimmtem Sinne um E_1 und E_2 dreht, bis λ_1 und λ_2 die gewünschte Grösse erreicht haben. Die Ecke E_3 rückt nach dem Unendlichen, sobald der Winkel λ_3 bei der obigen Operation negativ wird. So

bringt z. B. die erste Drehung von E_2E_3 um π die Ecke nach dem Unendlichem, wo sie dann bleibt (Fig. 13). Jede folgende halbe Umdrehung fügt eine Halbebene hinzu, was man so ansehen kann, als ob längs einer Seite E_2E_3, deren einer Endpunkt im Unendlichem liegt, eine Halbebene lateral angehängt wäre, aber es ist der Unterschied zwischen diesem Process und dem, den wir früher als laterale Anhängung bezeichneten, dass jetzt durch die Anhängung der Winkel E_3 beim unendlich weiten Punkt nicht um π vermehrt sondern vermindert ist. Der Winkel bei E_2 dagegen erhält in beiden Fällen den Zuwachs π. Wir werden diesen Process als *umkehrende Anhängung* bezeichnen, da er die Richtung der

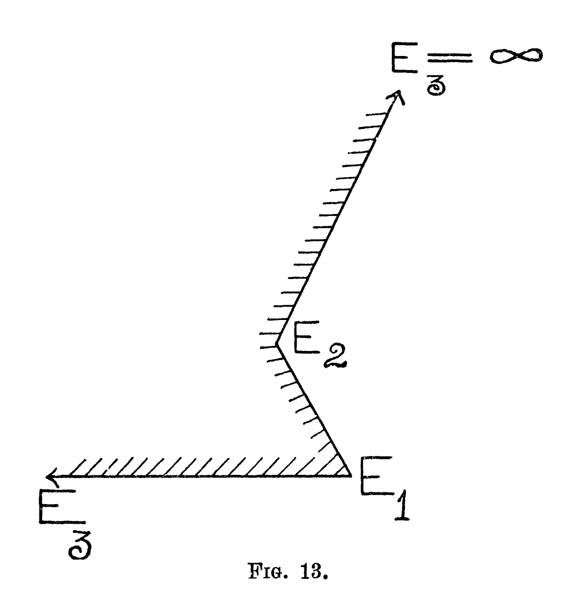


Fig. 13.

Seite von dem endlichem Endpunkt aus immer umkehrt. Wir werden auch die Fiktion machen, als ob durch diesen Process beim ersten Schritt eine ganze Halbebene anstatt des in Wirklichkeit angehängten Teiles angehängt wäre und dementsprechend von einer umkehrenden Anhängung einer Halbebene reden. Bei diesen Umkehrungen bleibt die Seite E_1E_2 ganz unberührt und deshalb *ist bei der zweiten Art von Fundamentaldreiecken die laterale Anhängung von Halbebenen längs der endlichen Seite (hier E_1E_2) immer möglich.*

Um die dritte Art von Dreiecken aus der ersten zu erhalten, haben wir die Linien E_1E_2 und E_1E_3 um E_1 zu drehen, damit die Winkel bei E_2 und E_3 die

richtige Abnahme und der Winkel bei E_1 den richtigen Zuwachs erhalte. Fig. 14 zeigt z. B. im Falle einer einzigen Umdrehung jeder Seite um π, wie sowohl E_2 als E_3 in's Unendliche rücken. Hiernach wenden wir umkehrende Anhängung von Halbebenen an und lassen dabei die Grenzlinie E_2E_3 ganz unberührt. Wir ersehen daraus, dass *bei der dritten Art von Fundamentaldreiecken polare Anhängung von Halbebenen längs eines Schnittes von der endlichen Ecke aus, hier* E_1, *nach der gegenüberliegenden Seite gestattet ist.*

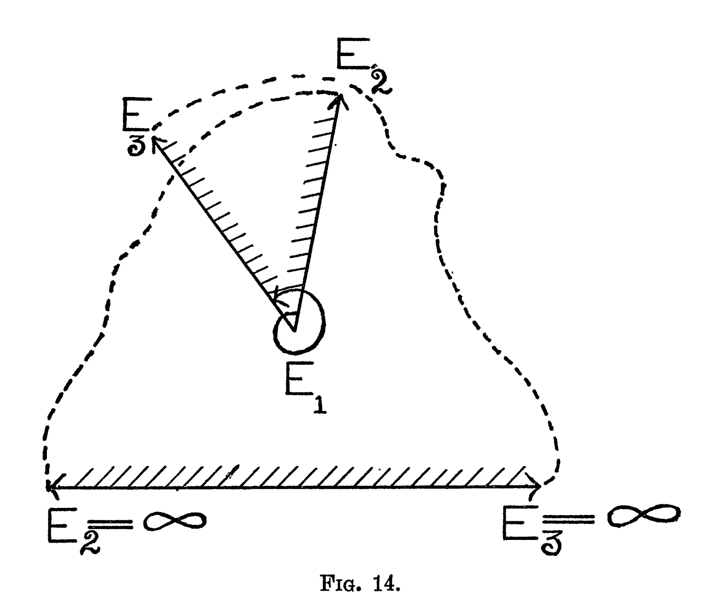


FIG. 14.

Wollen wir jetzt unsere Aufmerksamkeit auf eine Erzeugende vom Typus I richten:

$$\int \frac{(x_1\, dx_2)}{(x_1 - e_1x_2)^{1-\lambda_1}(x_1 - e_2x_2)^{1-\lambda_2}(x_1 - e_3x_2)^{1-\lambda_3}}$$

$$= \frac{Z_n}{N_n}(x_1 - e_1x_2)^{\lambda_1} \dots (x_1 - e_3x_2)^{\lambda_3}$$

$$+ \int \frac{(x_1\, dx_2)}{N_n^2\,(x_1 - e_1x_2)^{1-\lambda_1-2n}(x_1 - e_2x_2)^{1-\lambda_2}(x_1 - e_3x_2)^{1-\lambda_3}}.$$

λ_1, λ_2, λ_3 sind hier hinsichtlich ihrer Grösse nicht beschränkt. Die successiven Dreiecke der Reihe können aus dem Fundamentaldreieck durch successive

Vergrösserung des Winkels E_1 um 2π erhalten werden. Es sind vier Fälle je nach der Gestalt des Fundamentaldreiecks zu unterscheiden:

(1) λ_1 positiv, $\lambda_2 < 1$, $\lambda_3 < 1$,
(2) λ_1 positiv, $\lambda_2 > 1$, λ_3 negativ,
(3) λ_1 und λ_2 negativ, λ_3 positiv,
(4) λ_1 negativ, λ_2 und λ_3 positiv.

Wir werden setzen

$$\lambda_1 = l + (\lambda_1),$$
$$\lambda_2 = m + (\lambda_2),$$
$$\lambda_3 = n + (\lambda_3),$$

wo l, m, n Null oder positive oder negative ganze Zahlen sind und (λ_1), (λ_2), (λ_3) alle positiv und kleiner als 1 sind.

Fall (1). Das Fundamentaldreieck ist von der ersten oder dritten Art mit der Ecke E_1 im Endlichem. Der Winkel E_1 erhält seinen successiven Zuwachs von 2π durch polare Anhängung von Halbebenen nach der entgegengesetzten Seite hin. Entsprechend sind die Wurzeln von $N_n = 0$ alle reell und liegen zwischen e_2 und e_3. *Daher sind nach Prop. XXIV ff. die Wurzeln von $Z_n = 0$ auch alle reell und liegen abwechselnd mit denen von $N_n = 0$ in demselben Segmente.* Die oben unter (1) und (2) angegebenen Erzeugenden sind, wie erwähnt werden mag, in diesem Fall eingeschlossen.

Fall (2). Hier ist das Fundamentaldreieck von der zweiten Art, E_1E_2 liegt im Endlichen, und es ist laterale Anhängung längs dieser Seite möglich. Um den Winkel E_1 um 2π zu vergrössern, hängen wir zunächst lateral eine Halbebene an. Dadurch wächst sowohl E_1 wie E_2 um π. Um den letzten Zuwachs wieder aufzuheben, drehen wir die Seite E_2E_3 in eine solche Richtung, dass E_2 um π ab- und E_3 um denselben Betrag zunimmt. Mit anderen Worten wir nehmen eine Halbebene, die wir bei der Construction des Fundamentaldreiecks durch umkehrende Anhängung hinzufügten, wieder fort. Zuletzt drehen wir, um den Zuwachs von E_3 zu vernichten, E_1E_3 um E_1, indem wir E_1 einen zweiten Zuwachs π erteilen und E_3 auf seinen ursprünglichen Wert zurückführen. So haben wir längs E_1E_3 durch umkehrende Anhängung eine Halbebene hinzugefügt. E_1 hat jetzt einen Gesamtzuwachs von 2π erhalten, und unser erstes Dreieck in der Reihe nach dem Fundamentaldreieck ist hergestellt. Entsprechend der lateral angehängten Halbebene ist E_1E_2 in sein durch das Unendliche

gehendes Complement verwandelt, oder, mit anderen Worten, die Wurzel von $N_1 = 0$ liegt zwischen e_1 und e_2. Dieser Process kann ein zweites Mal wiederholt werden, E_1E_2 wird dadurch in seine Anfangslage zurückgeführt, und entsprechend der durch Vereinigung der beiden lateral angehängten Halbebenen gebildeten Vollebene werden die Wurzeln von $N_2 = 0$ beide imaginär sein. Diesen Process werden wir jetzt m-mal wiederholen. Die successiven Polynome N haben dann abwechselnd eine einzige oder keine reelle Wurzel zwischen e_1 und e_2, während alle anderen Wurzeln imaginär sind. Nach der m^{ten} Wiederholung kommt die Seite E_2E_3 in dasselbe Blatt mit E_1 und wird ferner für polare Anhängung von E_1 aus zugänglich. Von dieser Stelle an wird die Vergrösserung des Winkels E_1, wie im Falle (1), durch polare Anhängung bewirkt. Wir haben deshalb die Regel: *Im Falle* (2) *sind die Wurzeln aller N bis zu N_m incl. paarweise imaginär, abgesehen von einer reellen Wurzel bei jedem ungeraden N, die zwischen e_1 und e_2 liegt. Die Wurzeln aller folgenden N liegen reell zwischen e_2 und e_3, mit Ausnahme von m Wurzeln, die in derselben Weise wie diejenigen von N_m verteilt sind.*

Fall (3). Hier ist das Fundamentaldreieck von der dritten Art. Ist E_3 die im Endlichen gelegene Ecke, so ist polare Anhängung von Halbebenen an der gegenüberliegenden Seite möglich. Um das nächste Dreieck zu construieren, heften wir eine Halbebene polar an, wodurch der Winkel bei E_3 um 2π wächst. Dieser Zuwachs wird dann dadurch rückgängig gemacht, dass wir E_3E_1 eine volle Umdrehung um E_3 machen lassen. Wir nehmen auf diese Weise eine Vollebene fort und geben gleichzeitig E_1 den gewünschten Zuwachs von 2π. Um dann zu den nächsten Polygonen zu kommen, wiederholen wir die Operation $\frac{l}{2}$ oder $\frac{l-1}{2}$ mal, je nachdem $\frac{l}{2}$ oder $\frac{l-1}{2}$ eine ganze Zahl ist. Wenn l gerade ist, so ist die Ecke E_1 in's Endliche gerückt. Ist l ungerade, so muss man noch einen Schritt in der Reihe weiter gehen, um dieses Ziel zu erreichen. Wir drehen dann nämlich E_3E_1 um den Winkel π, indem wir E_1 einen Zuwachs, E_3 eine Abnahme π erteilen und die Ecke E_1 aus dem Unendlichen in's Endliche rücken lassen. Um die Abnahme von E_3 rückgängig zu machen, fügen wir jetzt lateral eine Halbebene längs E_3E_1 hinzu und vermehren so E_1 wieder um π. Wir sind jetzt, mag l gerade oder ungerade sein, zu einem Dreieck gekommen, dessen Blätter von E_3 aus polar an einander gehängt sind. Die Seite E_3E_1, deren Ecken im Endlichen liegen, ist jetzt für laterale Anhängung zugänglich geworden. Um also zum nächsten Dreieck überzugehen, fügen wir zwei Halbebenen lateral hinzu,—

d. h. eine Vollebene diagonal zwischen E_1 und E_3,—wodurch wir die beiden Winkel bei E_1 und E_3 um 2π vergrössern. Der letztere Winkel erhält dann seinen früheren Wert wieder, indem man eine der polar an ihn angehängten Halbebenen entfernt. Diesen combinierten Process wiederholen wir bei jedem folgenden Polygon, bis die letzte, an E_3 polar angehängte Halbebene entfernt ist. Wir ändern dann ein zweites Mal unsere Operationen. Wir fügen nur eine einzelne Halbebene lateral längs E_1E_3 an, indem wir E_1 und E_3 um π vergrössern. Um E_1 einen ferneren Zuwachs π zu erteilen und E_3 um den gleichen Betrag zu vermindern, hängen wir durch umkehrende Anhängung längs E_1E_2 eine Halbebene an und entfernen eine andere durch Rotation von E_3E_2 in gleicher Richtung. So bekommen wir das nächste Dreiecke in der Reihe, und wir wiederholen die combinierten Operationen m-mal, bis E_1 und die Seite E_3E_2 in demselben Blatt liegen und E_3E_2 für polare Anhängung zugänglich geworden ist. Von hier ab haben wir endlich zum nächsten Dreieck und dann zu allen folgenden *ad inf.* überzugehen, indem wir längs eines Schnittes von E_1 nach der gegenüberliegenden Seite, genau wie im Falle (1), Halbebenen polar anhängen. Wir übergehen hier die evidenten Entwickelungen für die Wurzeln der Polynome und ebenso den Fall (4).

Unser Interesse bei diesen Beispielen liegt hauptsächlich in der Thatsache, dass *man nach einer endlichen Anzahl von Schritten stets zu einem Dreieck gelangt, von dem aus jedes folgende durch wiederholte polare Anhängung einer Halbebene von E_1 aus nach der gegenüberliegenden Seite erhalten wird. Dies ist der letzte und wesentliche Charakter des ersten Typus von Erzeugenden mit drei Verzweigungspunkten*, wie wir nun allgemein beweisen werden.

Es genügt zu zeigen, dass für ein Dreieck in der Reihe der beschriebene Process möglich ist, un von da an immer wieder Platz zu greifen, und zu diesem Zwecke kann man den Winkel E_1, der die successiven Zuwachse von 2π erhält, beliebig gross wählen. Man hat zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $(\lambda_1)+(\lambda_2)+(\lambda_3)$ gleich 1 oder 2 ist. Entsprechend dem einem oder anderen Falle muss es ein Dreieck in der Reihe geben, für das man setzen kann:

$$(1)\quad \begin{aligned} \lambda_1' &= m+n+(\lambda_1)+2A, \\ \lambda_2' &= \pm m \quad +(\lambda_2), \\ \lambda_3' &= \pm n \quad +(\lambda_3), \end{aligned} \qquad (2)\quad \begin{aligned} \lambda_1' &= m+n+2A+(\lambda_1)+1, \\ \lambda_2' &= \pm m \qquad\qquad +(\lambda_2), \\ \lambda_3' &= \pm n \qquad\qquad +(\lambda_3), \end{aligned}$$

wo A, m, n jetzt als positive ganze Zahlen angenommen sind. Man construiere im ersten Falle ein gewöhnliches Dreieck mit den Winkeln $(\lambda_1)\pi$, $(\lambda_2)\pi$, $(\lambda_3)\pi$,

im zweiten Falle ein solches mit den Winkeln $\{1+(\lambda_1)\}\pi$, $(\lambda_2)\pi$, $(\lambda_3)\pi$, dessen Ecken alle im Endlichen liegen (vgl. Fig. 5, der unschraffierten Teil). Je nachdem m dann ein positives oder negatives Vorzeichen hat, fügen wir entweder durch laterale oder umkehrende Anhängung längs E_1E_2 m Halbebenen hinzu. Das Gleiche gilt für n. Dieser Process lässt die Seite E_2E_3 für polare Anhängung von A Halbebenen von E_1 aus frei, und auf diese Weise vervollständigen wir die Figur.

Typus II von Kettenbrüchen, bei dem zwei Winkel E_1 und E_2 gleichzeitig bei jedem Schritt um π zu vergrössern sind, ist in ähnlicher Weise durch laterale Anhängung von Halbebenen längs E_1E_2 charakterisiert. λ_1' und λ_2' können bei genügendem Fortschreiten in der Reihe beliebig gross gemacht werden, und um unseren Satz zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, dass laterale Anhängung möglich wird, wenn wir weit genug in der Reihe vorwärts gehen (um von da an fortgesetzt möglich zu sein). Wir werden die Fälle, wo $(\lambda_1)+(\lambda_2)+(\lambda_3)$ gleich 1, resp. 2 ist, wieder getrennt behandeln.

I. $$(\lambda_1)+(\lambda_2)+(\lambda_3)=1.$$

Wir werden in diesem Falle $\lambda_3'-(\lambda_3)$ als die Summe zweier positiver oder negativer ganzer Zahlen l' und m' darstellen, deren Differenz der Differenz von $\lambda_1'-(\lambda_1)$ und $\lambda_2'-(\lambda_2)$ gleich ist. Wir können dann immer bei genügendem Vorwärtsgehen in der Reihe ein Dreieck finden, für das eine der zwei folgenden Möglichkeiten eintritt.

(a). *l' und m' von gleichen Zeichen.* Man setze $l'=\pm l$, $m'=\pm m$, wo l und m positiv sind und hat dann:

$$\begin{aligned}\lambda_1' &= l' + A + (\lambda_1),\\ \lambda_2' &= m' + A + (\lambda_2),\\ \lambda_3' &= \pm(m+l)+(\lambda_3).\end{aligned}$$

Construiert man jetzt ein gewöhnliches Dreieck mit den Winkeln $(\lambda_1)\pi$, $(\lambda_2)\pi$, $(\lambda_3)\pi$, so haben wir danach entweder l und m Halbebenen lateral, wenn l' und m' positiv sind, oder durch umkehrende Anhängung, wenn l' und m' negativ sind, längs E_1E_3 und E_2E_3 anzuhängen. Dies lässt die Seite E_1E_2 für laterale Anhängung von A Halbebenen frei; wie zu beweisen war.

(b). *l' und m' von verschiedenen Zeichen,*

$$l'>0,\quad m'=-m<0,\quad \lambda_1>\lambda_2.$$

Je nachdem $l'-m$ positiv oder negativ ist, setze man

$$\begin{aligned}\lambda_1' &= (l'-m)+(A-m)+2m+(\lambda_1) \text{ oder } (m-l')+(A-l')+2l'+(\lambda_1),\\ \lambda_2' &= (A-m)+(\lambda_2) \text{ oder } +(A-l')+(\lambda_2),\\ \lambda_3' &= l'-m+(\lambda_3),\end{aligned}$$

wo die Klammergrössen positiv sind. Dann hänge man $l'-m$ Halbebenen lateral, resp. $m-l'$ durch umkehrende Anhängung längs E_1E_3 im Dreieck $(\lambda_1)\pi$, $(\lambda_2)\pi$, $(\lambda_3)\pi$ an und zugleich $2m$, resp. $2l'$ Halbebenen von E_1 aus polar an die gegenüberliegende Seite. E_1E_2 bleibt dabei für laterale Anhängung von $A-m$, resp. $A-l'$ Halbebenen frei, wie behauptet war.

II. $$(\lambda_1)+(\lambda_2)+(\lambda_3)=2.$$

Wir werden $\lambda_3'-(\lambda_3)-1$ in l' und m' spalten, wie wir es vorher mit $\lambda_3-(\lambda_3)$ thaten. Es bieten sich dann die drei Fälle:

(a). $$\begin{aligned}&l'>0,\quad m'>0,\\ &\lambda_1'=l'+A+(\lambda_1),\\ &\lambda_2'=m'+A+(\lambda_2),\\ &\lambda_3'=m'+l'+(\lambda_3)+1.\end{aligned}$$

Man construiere ein reduciertes Dreieck $(\lambda_1)\pi$, $(\lambda_2)\pi$, $\big((\lambda_3)+1\big)\pi$ und verfahre wie in I (a) oben.

(b). $$\begin{aligned}&l'=-l<0,\quad m'=-m<0,\\ &\lambda_1'=m+A+1+(\lambda_1),\\ &\lambda_2'=l+A+1+(\lambda_2),\\ &\lambda_3'=-l-m+2-\big(1-(\lambda_3)\big).\end{aligned}$$

Man construiere das reducierte Dreieck $(\lambda_1)\pi$, $(\lambda_2)\pi$, $-\big(1-(\lambda_3)\big)\pi$ und sehe wieder I (a) oben.

(c). $$l'>0,\quad m'=-m<0,$$

$$\begin{aligned}\lambda_1' &= (l'-m+2)+(A-m)+2m-2+(\lambda_1) \text{ oder } (m-l'-2)+(A-l')+2l'+2+(\lambda_1),\\ \lambda_2' &= (A-m)+(\lambda_2) \text{ oder } (A-l')+(\lambda_2),\\ \lambda_3' &= l'-m+2-\big(1-(\lambda_3)\big).\end{aligned}$$

Man construiere das reducierte Dreieck wie in II (b) und gehe dann weiter wie in I (b).

In Typus III wird ein Winkel E_1 um π vergrössert, ein anderer E_2 um den gleichen Betrag vermindert. Schliesslich wird der Winkel bei E_1 positiv, während der bei E_2 negativ wird; die Ecke E_1 liegt darnach immer im Endlichen, E_2 dagegen im Unendlichen, und die erforderlichen Veränderungen werden durch umkehrende Anhängung von E_1E_2 um E_1 erzielt. Mit anderen Worten, *der Typus III ist durch umkehrende Anhängung von Halbebenen charakterisiert.*

So erkennen wir, wie im Falle $r = 2$ dreien von den vier Kettenbruchtypen schliesslich drei Arten von Anhängungen entsprechen. Man kann vermuten, dass etwas Aehnliches allgemein gilt, mag die Zahl der Verzweigungspunkte auf drei beschränkt sein oder nicht.

(B). *Die höheren Fälle und ihre Irregularitäten.*

Das geometrische Studium der Polygone gestaltet sich in jeder Weise complicierter, sobald r grösser als 2 ist. Es treten dann Windungs- und Wendepunkte in den Polygonen auf, und der Kettenbruch braucht nicht mehr regulär zu sein. Man kann in den meisten Fällen, vielleicht in allen, eine grosse Zahl von Polygonen finden, die von den vorgeschriebenen Linien begrenzt werden, gegebene Winkel E und eine bestimmte Anzahl von Windungs- und Wendepunkten besitzen. Unsere bisherigen Principien setzen uns aber nicht in dem Stand zu entscheiden, welches von diesen wir als verwandt mit dem Fundamentalpolygon auswählen sollen, d. h. die nämlichen e liefert wie dieses. Die Schwierigkeiten werden noch mehr hervortreten, wenn wir einen der einfachsten Fälle betrachten, nämlich

Die Erzeugende für den Lamé'schen Fall:

$$\int \frac{A.(x-\rho_0)\,dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} = \frac{Z_n}{N_n}\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)} + \int \frac{A_n.(x-\rho_n)\,dx}{N_n^2.\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

$$-\infty < e_1 < e_2 < e_3 < e_4 = \infty,$$

$$\lambda_1' = \lambda_2' = \lambda_3' = \tfrac{1}{2}, \quad \lambda_4' = -\tfrac{1}{2} + 2n.$$

In den Integralen tritt nur ein einziger ganzzahliger Punkt auf, und deshalb besitzen die Polygone einen einzigen Wende- und keinen Windungspunkt. Wir werden das ρ_0 in dem Fundamentalintegral zwischen e_1 und $-\infty$ annehmen. Dann liegt der Wendepunkt T_0 zwischen E_1 und E_4 im Fundamentalpolygon, das

die in Fig. 15 skizzierte Gestalt hat. Nun haben die anderen Polygone einen positiven Winkel $\lambda_4' \pi$ an der vierten Ecke, welche deshalb bei E_4' anstatt beim

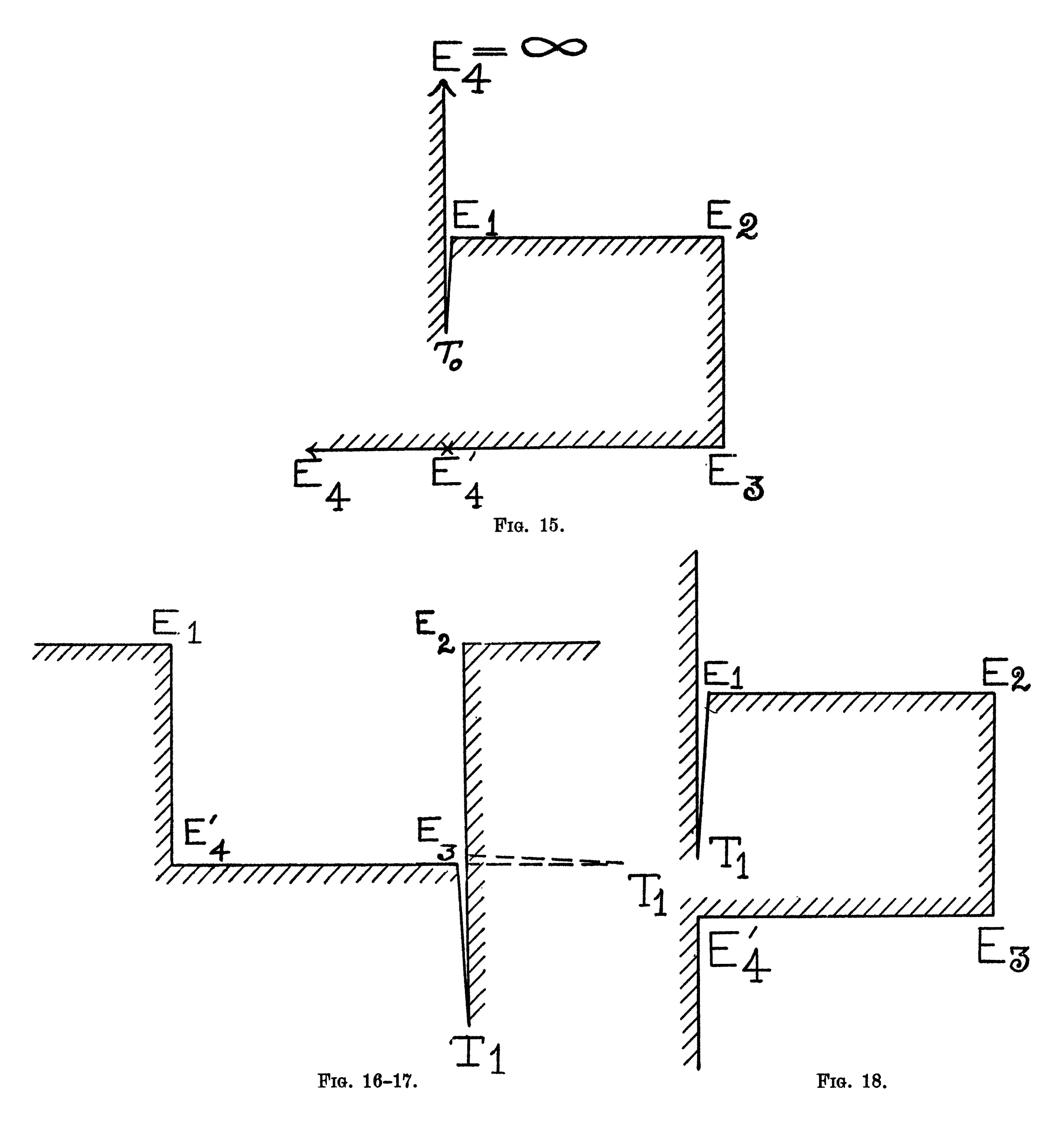


FIG. 15.

FIG. 16–17.

FIG. 18.

Unendlichem liegen muss. Der Lamé'sche Kettenbruch wird also, wie man sagen kann, durch eine Art von Rechtecken charakterisiert. Der Winkel E_4'

wächst von Rechteck zu Rechteck um 2π, da die vorgelegte Erzeugende vom Typus I ist. Aber man muss, um die Rechtecke zu zeichnen, noch die Lage der ρ_n und der Wurzeln von $N_n = 0$ zu den e kennen. Bei Abwesenheit

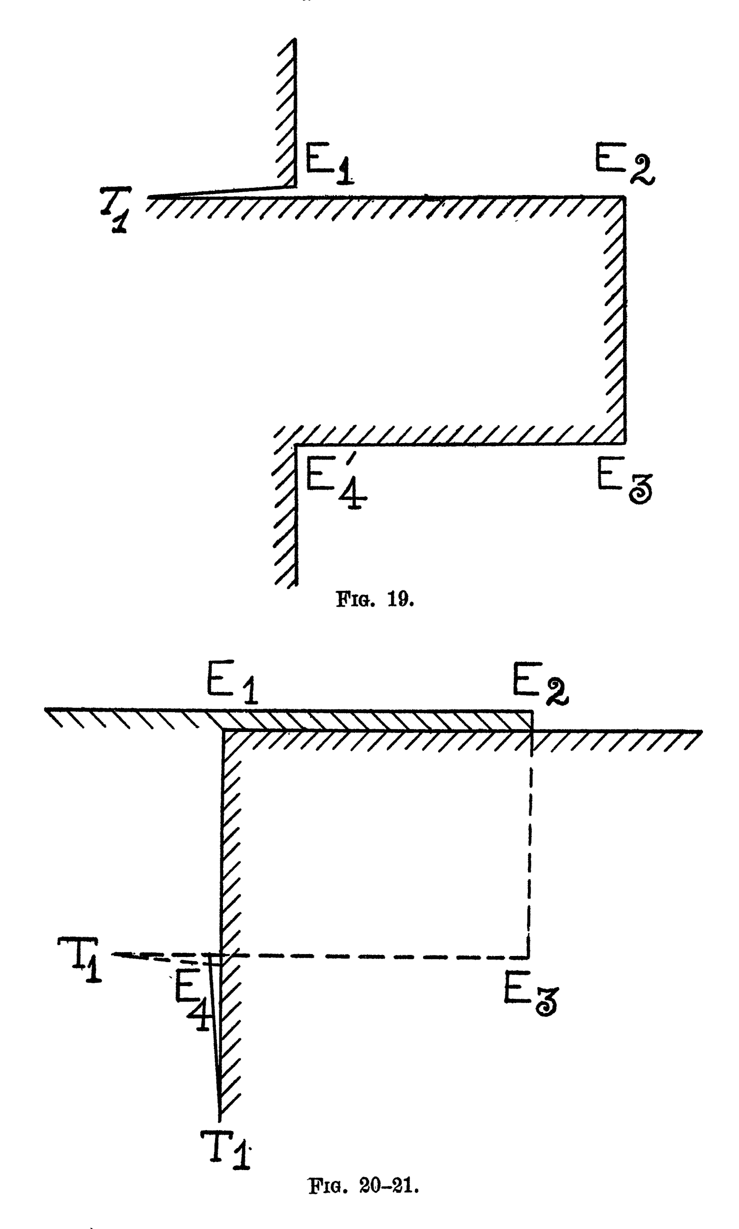


FIG. 19.

FIG. 20–21.

dieser Data ist die Bestimmung nicht mehr eindeutig, wie vorher bei den Dreiecken. So hat man z. B. bei dem ersten Rechteck nach dem fundamentalen noch die Wahl zwischen den sechs Gestalten in Fig. 16–21 oder den sechs ähnlichen,

die aus den vorigen entstehen, wenn man die Rollen von E_1 und E_3 vertauscht. Wenn wir zum nächsten Polygon in der Reihe übergehen, so muss der Winkel bei E_4' um 2π wachsen. Dies kann durch polare Anhängung einer Halbebene von E_4' aus nach einer der gegenüberliegenden Seiten hin in irgend einer der 12 Figuren erzielt werden. Dieser Process ist indessen nicht absolut notwendig. Fig. 22–23 geben zwei Polygone, welche nicht auf diese Weise erhalten werden können.

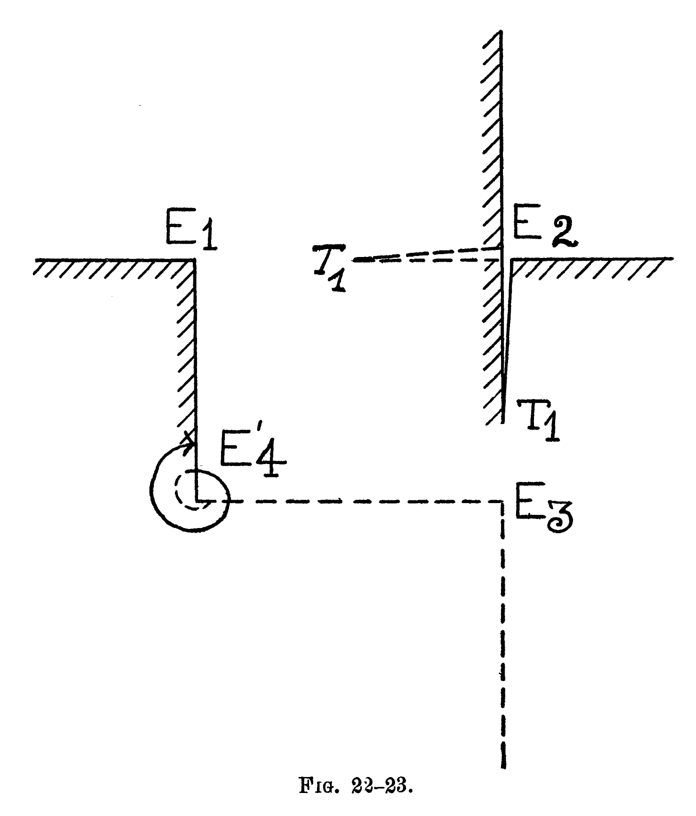


Fig. 22–23.

Beim Uebergang zum dritten Polygone in der Reihe und allen folgenden ist der Process der polaren Anhängung an den vorigen Figuren eine geometrische Notwendigkeit. Der Leser kann sich davon, wie der Verfasser es gethan hat, leicht überzeugen. Da aber immer noch die Zweideutigkeit bleibt, nach welcher der beiden gegenüberliegenden Seiten der Schnitt zu ziehen ist, so wächst die Anzahl der geometrisch möglichen Polygone mit wachsenden n. In dieser Beziehung sind indessen zwei Punkte zu betonen. Zunächst ist der Umstand, dass der polare Anhängungsprocess, wenn auch nicht zu Anfang, so

doch schliesslich immer angewandt werden muss, nicht zufällig. Man hat ihn vielmehr als die wesentliche Charakteristik der Erzeugende von Typus I anzusehen. Zweitens ist zu bemerken, dass die Geometrie, obwohl sie uns keinen endgültigen Aufschluss über die Verteilung der Wurzeln geben kann, doch keineswegs als nutzlos für unseren Zweck bei Seite geschoben werden darf. Ganz im Gegenteil! Wenn man nur auf die Figuren blickt, so sieht man, dass höchstens eine der beiden Seiten $E_4'E_3$, $E_4'E_1$ durch das Unendliche sich erstrecken kann und die Oberfläche überhaupt nicht. Man kann deshalb sogleich schliessen, dass höchstens eine Wurzel irgend eines der N_n ausserhalb der äussersten endlichen Verzweigungspunkte e_1 und e_3 liegt, während keine imaginär werden kann. Dies stimmt mit dem im Kap. II citierten Satze von Markoff überein. Der gleiche Schluss kann aus dem Polygon für irgendwelche Werte von λ_1', λ_2', λ_3', die algebraisch kleiner als 1 sind, gezogen werden, und so kann der einzige über die Wurzeln der N_n für $r > 3$ bekannte allgemeine Satz direct aus der Gestalt des Polygons abgelesen werden. Vgl. Prop. XXVII des nächsten Kapitels.

Derselbe Kettenbruch ist auch interessant, weil er uns bei geeigneter Annahme des ρ_0 im Fundamentalintegral ein erstes Beispiel einer Irregularität in seiner Entwickelung bietet. Die Irregularität, welche auftritt, ist die für Lamé's Polynom. Wie wir in Kap. I sahen, waren in diesem Falle zwei successive Approximanten, nämlich die n^{te} und $(n+1)^{ste}$ gleich. Die erste approximierte von einer Ordnung, die um 1 grösser war als im normalen Falle, die zweite deshalb, da der normale Zuwachs der Annäherungsordnung 2 ist, von einer Ordnung, die um 1 kleiner war als die normale. In dem ersten der entsprechenden Reste

$$\int \frac{A_n\,(x-\rho_n)\,dx}{N_n^2\cdot\sqrt{(x-e_1)\ldots\ldots(x-e_3)}}$$

wächst der Exponent $\lambda_4' = -\frac{1}{2} + 2n$ um eine Einheit über das Normale, weil der Punkt ρ_n mit dem Punkt ∞, wo approximiert wird, zusammenfällt, und der Faktor $x-\rho_n$ muss daher durch eine Constante ersetzt werden. Der nächste Rest

$$\int \frac{A_{n+1}\,(x-\rho_{n+1})\,dx}{N_{n+1}^2\cdot\sqrt{(x-e_1)\ldots\ldots(x-e_3)}}$$

kann dem vorigen nur gleich werden, wenn ρ_{n+1} und ausserdem eine Wurzel von $N_{n+1}=0$ in's Unendliche rückt. Um zu verstehen, wie die Polygone gleich werden, werden wir zunächst voraussetzen, dass ρ_0, die Constante unseres Funda-

mentalintegrals, unendlich wenig abgeändert wird, so dass die Irregularität in unserem Kettenbruch verschwindet, und dann den Grenzübergang zum Falle der Irregularität machen. Durch die Aenderung von ρ_0 werden ρ_n und ρ_{n+1} von dem Unendlichen fortgeschafft aber bleiben doch noch sehr gross, und entsprechend müssen in den Polygonen die Wendepunkte T_n und T_{n+1} gerade im Begriff sein, sich mit E_4' zu vereinigen. Denken wir uns der Einfachheit der Darstellung halber alle angehängten Halbebenen abgetrennt, so kommen wir auf die früheren Figuren zurück. Wir erkennen zugleich, dass nur die Polygone von Fig. 18, 20 und 21 die Bedingungen für T_n und T_{n+1} erfüllen können. Lassen wir jetzt ρ_n und ρ_{n+1} in's Unendliche rücken. In Fig. 20 oder 21 erhält der Winkel bei E_4' dann einen Zuwachs von π, und da dies eine Vermehrung der Approximationsordnung um 1 anzeigt, so entspricht Fig. 20 oder 21 dem n^{ten} Integral. Dagegen wird in Fig. 18 der Winkel bei E_4' um π vermindert, und daher entspricht diese Figur dem $(n+1)^{\text{sten}}$ Integral. Zu gleicher Zeit wird eine Halbebene vom Polygone losgetrennt. Dies entspricht dem Umstande, dass eine Wurzel von $N_{n+1} = 0$ verloren geht, worauf der Grad von N_{n+1} auf den von N_n herabsinkt. Die polar angehängten Halbebenen bleiben natürlich von dem Grenzübergange unberührt. Sie müssen so angeheftet werden, dass beide Polygone in der Grenze gleich werden und das nämliche Lamé'sche Irregularitätsintegral vorstellen. Die Figur zeigt dann, dass keine der Wurzeln des Lamé'schen Polynoms ausserhalb des Intervalles $e_1 e_3$ liegen kann, wie ja bekannt ist (vgl. Kap. II).

Dies specielle Beispiel erklärt vollständig den Charakter einer Irregularität der ersten Ordnung für irgend einen Kettenbruch vom Typus I. Eine Irregularität der zweiten Ordnung kann in gleicher Weise behandelt werden. Drei successive Näherungsbrüche, drei Reste

$$\int \frac{W_{r-2}\cdot(x_1\,dx_2)}{N_n^2\cdot(x_1-e_1x_2)^{1-\lambda_1'}\,(x_1-e_2x_2)^{1-\lambda_2'}\cdots\cdots(x_1-e_{r+1}x_2)^{1-\lambda_{r+1}'}},$$

$$\int \frac{W_{r-2}'\cdot(x_1\,dx_2)}{N_{n+1}^2\cdot(x_1-e_1x_2)^{1-\lambda_1'-2}(x_1-e_2x_2)^{1-\lambda_2'}\cdots\cdots(x_1-e_{r+1}x_2)^{1-\lambda_{r+1}'}},$$

$$\int \frac{W_{r-2}''\cdot(x_1\,dx_2)}{N_{n+2}^2\cdot(x_1-e_1x_2)^{1-\lambda_1'-4}(x_1-e_2x_2)^{1-\lambda_2'}\cdots\cdots(x_1-e_{r+1}x_2)^{1-\lambda_{r+1}'}}$$

und drei Polygone werden wechselseitig gleich. Die erste der zwei Approximanten approximiert bei e_1 das Fundamentalintegral in einer um zwei Einheiten höheren Ordnung als gewöhnlich; zugleich erhält in dem ersten Integral λ_1' einen

Zuwachs von zwei Einheiten durch das Zusammenfallen zweier ganzzahliger Punkte von W_{r-2} mit e_1. Die mittlere Approximante approximiert in der gewöhnlichen Weise, und das zweite Integral wird dem ersten durch Aufnahme einer Wurzel von $N_{n+1} = 0$ und zweier ganzzahliger Punkte von W_{r-2} in das e_1 gleich, ohne dass dabei irgend eine Aenderung des entsprechenden Exponenten eintritt. Die dritte Approximante bleibt um zwei Einheiten unter der gewöhnlichen Annäherungsordnung, und λ_1' im dritten Integral vermindert sich um 2, weil zwei Punkte ρ und zwei Wurzeln von $N_{n+2} = 0$ mit e_1 zusammenfallen.

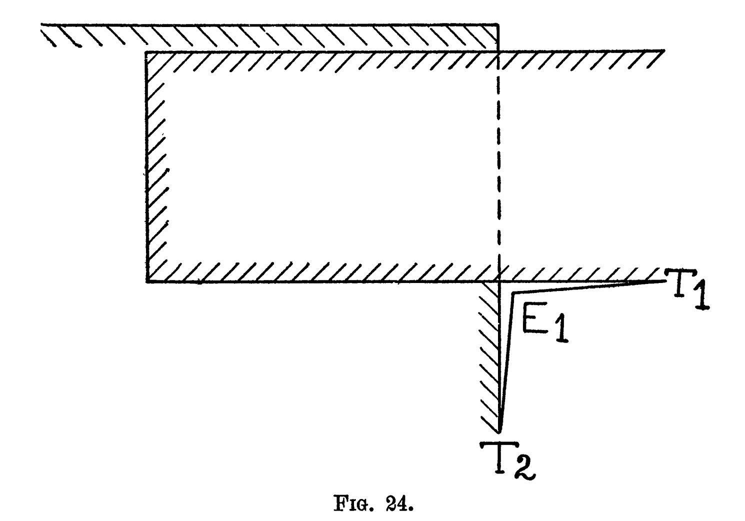


FIG. 24.

Um zu verstehen, wie die Gleichheit der zugehörigen Polygone herauskommt, ändern wir wieder die Gestalt unseres Fundamentalpolygons unendlich wenig ab, so dass die Irregularität noch nicht eintritt, aber ihr Eintreten dicht bevorsteht. Wir werden, wie vorher, wieder möglichst einfache Beispiele wählen und alle Ebenen und Halbebenen, welche von dem Grenzübergang nicht berührt werden, abtrennen; denn es ist uns nur darum zu thun, das Wesentliche der Veränderungen verständlich zu machen. Dem Paare ρ in irgend einem Integral, das im Begriffe ist, mit e_1 zusammenzufallen, können entweder zwei Wendepunkte oder ein Windungspunkt entsprechen. Betrachten wir zuerst den Fall zweier Wendepunkte und setzen voraus, dass sie auf entgegengesetzten Seiten von E_1, aber nur durch unendlich kleine Stücke der resp. Seiten davon getrennt liegen (Fig. 24). Bei ihrer Vereinigung muss der Winkel E_1 um 2π wachsen, und deshalb entspricht

ein solches Polygon dem ersten der Integrale. Wenn einer der beiden Wendepunkte durch den ∞ fernen Punkt von E_1 getrennt wird, (einen solchen Fall hatten wir in dem Polygon, Fig. 18), so wird durch seine Vereinigung mit E_1, entsprechend dem Verluste einer Wurzel des zugehörigen N, eine Halbebene abgetrennt werden, wodurch der betreffende Winkel abnimmt. Dieser Abnahme hält die Vereinigung des anderen Wendepunktes mit E_1 das Gegengewicht, und deshalb haben wir ein Polygon, das dem mittleren der obigen Integrale entspricht. Wenn andererseits beide Wendepunkte auf den zugehörigen Seiten durch den ∞ fernen Punkt von E_1 getrennt werden, so werden entsprechend dem Verluste zweier Wurzeln eines N zwei Halbebenen abgetrennt, und der Winkel E_1 nimmt um 2π ab. Eine solche Figur muss zu dem letzten der drei Integrale gehören. Indem wir jetzt weiter voraussetzen, dass die Wendepunkte auf derselben Seite von E_1

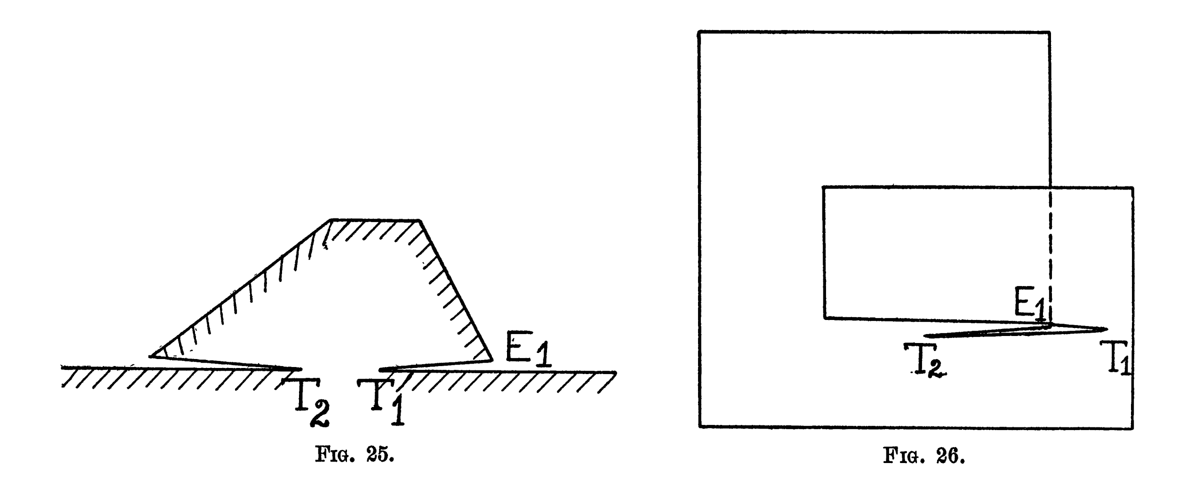


Fig. 25. Fig. 26.

liegen, wird durch ihre Vereinigung mit E_1, wenn sie durch den Punkt ∞ längs ihrer Seite getrennt werden, eine Halbebene abgeschnitten werden, jedoch ohne Aenderung des Winkels (Fig. 25). Dies giebt uns eine zweite Art von Polygonen, die für das mittlere Integral möglich ist. Wenn die Wendepunkte dagegen nicht durch den ∞ fernen Punkt getrennt werden, so kann man erwarten, dass ihre Vereinigung mit E_1 entweder den Winkel bei E_1 um 2π vergrössert (Fig. 26), wodurch eine zweite dem ersten Integrale entsprechende Polygonart entsteht, oder um 2π verkleinert, wobei eine Vollebene abgespalten wird. Die Natur der diesem letzteren Vorkommnis entsprechenden Polygone wird am

besten verstanden, wenn wir sie aus zwei Teildiagrammen construieren (Fig. 27) und diese längs der gekrümmten Strecke auf einander legen. Die Vereinigung der beiden Wendepunkte mit E_1 wird dann die Verbindungstrecke der beiden Figuren auf einen Punkt reducieren und dadurch die Vollebene abtrennen, die in dem zweiten Teildiagramm dargestellt ist. Entsprechend der abgetrennten Ebene ist ein Paar imaginärer Wurzeln des zum dritten Integral gehörigen Polynoms $N_{n+2} = 0$ verloren gegangen. Endlich kann man einen *Windungspunkt* W' mit E_1 vereinigen. Wenn mit seiner Hülfe ein Blatt längs eines Schnittes zwischen W' und E_1 angehängt war, so wird die Vereinigung den Winkel bei E_1 um 2π vermindern und entsprechend dem Verlust eines Paares von Wurzeln eine

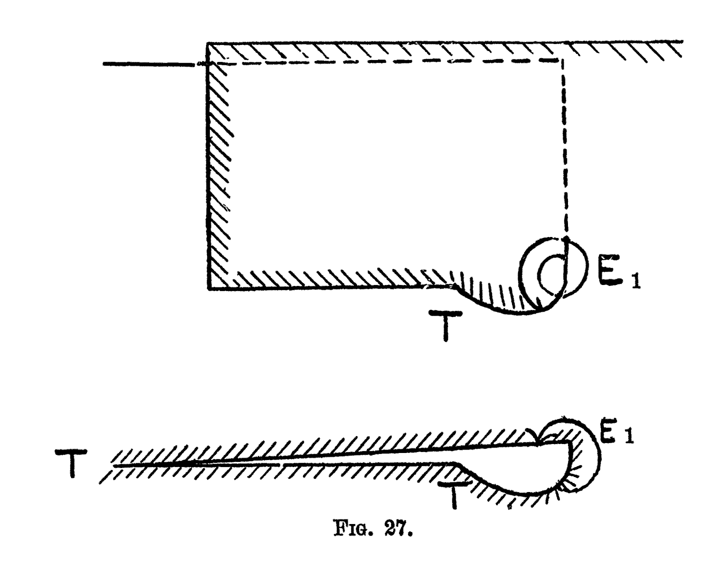


FIG. 27.

Vollebene abschneiden. Wir haben so eine dritte Art von Polygonen für das dritte Integral. Wenn man andererseits ein Blatt längs eines Schnittes nach irgend einer anderen Ecke als E_1 angehängt hätte, so wäre die einzige Veränderung, die durch Vereinigung von W' und E_1 entsteht, eine Zunahme des Winkels E_1 um 2π gewesen, und so hätte man noch eine Art von Polygonen für das erste Integral erhalten. Es ist wohl kaum nötig zu bemerken, dass die drei zusammengehörigen Polygone immer von solcher Gestalt sein müssen, dass sie in der Grenze genau zusammenfallen.

In eine Discussion der höheren Irregularitäten für den ersten Typus von Kettenbrüchen brauchen wir hier nicht einzutreten. Sie sind vollständig durch

Wiederholung der eben geschilderten Vorkomnisse zu erklären. So kann man z. B. die Vereinigung zweier Windungspunkte mit einer Ecke als successive Vereinigung erst des einen, dann des anderen ansehen. In ähnlicher Weise können die Irregularitäten der anderen Typen von Kettenbrüchen behandelt werden. Es tritt dabei nur eine wiederholte Vereinigung von Wende- und Windungspunkten mit den Ecken ein, auf die sich die Approximation bezieht, und eine solche Trennung von Ebenen und Halbebenen, wie wir sie oben auseinandergesetzt haben.

KAPITEL V.

EINIGE SÄTZE ÜBER DIE WURZELN VERSCHIEDENER POLYNOME.

Wir wenden uns jetzt zu einigen Folgerungen, die die Polynome V betreffen. Es ist klar, dass die Verteilung der Wurzeln der Polynome auf die verschiedenen Segmente $e_i e_{i+1}$ der reellen Axe und das imaginäre Gebiet von der geometrischen Beschaffenheit der Polygone, nämlich der Grösse der Winkel $\lambda'\pi$ und der Lage der Windungs- und Wendepunkte abhängt. Dies zwingt uns, mehr auf die Betrachtung specieller Fälle als auf die Aufstellung allgemeiner Sätze auszugehen. Daher verschieben wir die bezüglichen ueberlegungen bis auf den zweiten Teil dieses Kapitels und lenken zuerst unsere Aufmerksamkeit auf gewisse Regeln von allgemeiner Anwendbarkeit, die wir hinsichtlich der relativen Verteilung der Wurzeln der Polynome V von benachbarten Integralen ableiten können.

(A). *Gegenseitige Trennung der Wurzeln benachbarter Polynome.*

Es haftet ein besonderes Interesse an diesem Gegenstand, weil, wie wir gesehen haben, die consecutiven Näherungsnenner unserer Kettenbrüche benachbart sind, und weil auch umgekehrt irgend zwei benachbarte Polynome in einen Kettenbruch eingeschaltet werden können.

Wir werden gleich finden, dass die ganzzahligen Punkte auch hier eine wichtige Rolle spielen. Insofern die ganzzahligen Punkte irgend eines Integrals zugleich Verzweigungspunkte der für sein Polynom V geltenden Differentialgleichungen sind, wird es vorteilhaft sein, kurz von den ganzzahligen Punkten des V zu reden. Wir bedienen uns dieser Ausdrucksweise in dem ersten Satz, den wir jetzt aufstellen:

PROP. XXII.— *Wenn in irgend einem Segmente $e_i e_{i+1}$ zwei successive Wurzeln eines Polynoms durch eine gerade Anzahl seiner ganzzahligen Punkte getrennt werden,*

so müssen zwischen ihnen eine ungerade Anzahl von Wurzeln jedes benachbarten Polynoms liegen; wenn die beiden Wurzeln durch eine ungerade Anzahl ganzzahliger Punkte getrennt werden, so muss eine gerade Zahl (die auch Null sein kann) von Wurzeln jedes benachbarten Polynoms dazwischen liegen.

Dieser Satz kann als eine Folge der geometrischen Continuität der Polygone aufgefasst werden. Jedes ist ein einfach zusammenhängender Bereich. Das ist augenscheinlich, wenn wir uns erinnern, dass die Ebene in funktionentheoretischem Sinne nur eine continuirlich durch das Unendliche gehende Kugel ist. Irgend ein Polygon kann deshalb aus irgend einem anderen continuirlich durch Deformation oder Streckung abgeleitet werden. Eine solche Deformation hat man in der Gleichung für benachbarte Integrale:

$$\int \frac{W'_{r-2}\cdot(x_1\,dx_2)}{V^2_{q'}\cdot\Pi\,(x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda_i'}} - \int \frac{W''_{r-2}\cdot(x_1\,dx_2)}{V^2_{q''}\cdot\Pi\,(x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda_i''}} = \frac{\Pi\,(x_1 - e_i x_2)^{\bar{\lambda}_i}}{V_{q'}\,V_{q''}}.$$

Der Ausdruck rechter Hand giebt uns in der That die Verschiebung an, die ein Punkt η des ersten Integrals erfahren muss, falls er in den entsprechenden des zweiten übergeführt wird. Irgend eine Seite des einen Polygons wird dabei ersichtlich in die entsprechende Seite des benachbarten übergeführt, irgend ein continuirlicher Teil der einen Seite in einen continuirlichen Teil der anderen. Betrachten wir jetzt zwei successive Wurzeln eines der beiden Polynome $V_{q'}$ und $V_{q''}$ zwischen e_i und e_{i+1}, und setzen wir erstens voraus, dass eine gerade Anzahl seiner reellen ganzzahligen Punkte zwischen den Wurzeln liegt. Der entsprechende Teil der Seite E_iE_{i+1} des Polygons geht von dem Unendlichen wieder nach dem Unendlichen, und da seine Richtung während dessen entweder überhaupt nicht oder eine gerade Anzahl von Malen umkehrt, so muss derselbe die Vollebene durchziehen. Nun kann man einen Kettenbruch bilden, in welchem zwei successive Näherungsnenner die beiden V enthalten, und deshalb haben $V_{q'}$ und $V_{q''}$ keine gemeinsame Wurzel. Durch die Ueberführung des einen Polygons in das andere müssen deshalb die beiden Enden der Teilseite, die beim Unendlichen liegen, in's Endliche gebracht werden. Die dicht an den beiden Enden liegenden Punkte müssen sich dann in entgegengesetzten Richtungen in der Ebene bewegen, und deshalb muss sich mindestens bei einem dazwischen liegenden Punkte der Teilseite die Richtung der Verschiebung umkehren; wenn sie sich aber öfter umkehrt, muss sie sich eine ungerade Anzahl von Malen umkehren. Nun zeigt aber der obige analytische Ausdruck, dass die Umkehrung nur bei Punkten, die den

Wurzeln der beiden Polynome entsprechen, stattfinden kann. Es folgt daraus, dass zwischen irgend zwei successiven Wurzeln des betrachteten Polynoms eine ungerade Anzahl von Wurzeln des anderen liegen muss. Wollen wir jetzt die zweite Voraussetzung machen, dass zwischen zwei successiven Wurzeln des einen Polynoms in dem Segmente eine ungerade Anzahl seiner ganzzahligen Punkte liegt. Dann rückt in entsprechender Weise im Polygon ein Teil einer Seite von dem Unendlichen in's Endliche, kehrt seine Richtung bei den Wendepunkten eine ungerade Anzahl von Malen um und kehrt nach dem Unendlichen auf derselben Seite der Ebene zurück, auf welcher er von dem Unendlichen hergekommen war. Wenn jetzt das Polygon in das andere übergeführt wird, so müssen die äussersten Punkte an beiden Enden der Teilseite durch Verschiebung in gleicher, nicht in entgegengesetzter Richtung in's Endliche gebracht werden. Wenn daher die Richtung der Verschiebung zwischen den äussersten Punkten sich überhaupt umkehrt, so kann es nur eine gerade Anzahl von Malen geschehen. Dementsprechend müssen wir entweder keine Wurzeln des anderen Polynoms oder eine gerade Anzahl zwischen den betrachteten Wurzeln finden, wie zu beweisen war.

Eine interessante Anwendung unseres Principes haben wir, wenn keins der beiden betrachteten Polynome in dem Segmente $e_i e_{i+1}$ irgend einen ganzzahligen Punkt besitzt. Es folgt dann daraus, dass sich die Wurzeln der Polynome wechselseitig in dem Intervall trennen. Ein specielles Beispiel davon ist der hypergeometrische Fall $r = 2$, wo überhaupt keine ganzzahligen Punkte existieren. Man hat so das Theorem:

PROP. XXIII.—*Bei allen Kettenbrüchen wie bei der vollständigen Gesamtheit der Integrale oder Approximanten, bei denen nur drei Verzweigungspunkte e vorhanden sind, trennen sich die Wurzeln zweier aufeinanderfolgender Näherungsnenner, resp. zweier benachbarter V, die zwischen zwei consecutiven Verzweigungspunkten liegen, wechselseitig.*

Dieser Satz schliesst als speciellen Fall den am Ende von Kap. II erwähnten ein, wo wir vorausgesetzt hatten, dass alle drei λ' ausser einem algebraisch kleiner als 1 seien. Man kann ihn auch auf die Kettenbrüche (1) und (2), S. 64, anwenden. So trennen sich z. B. die Wurzeln der aufeinanderfolgenden Kugelfunktionen erster Art wechselseitig, wie das ja sehr bekannt ist.

In gleicher Weise, wie wir zwei benachbarte Polygone verglichen haben, können wir bei einer Erzeugenden irgend ein Polygon mit dem Fundamentalpolygon, das als Basis der Approximation diente, vergleichen. Die hierher gehörige Formel lautet:

$$\int \frac{W_{r-2}.(x_1\, dx_2)}{\Pi\, (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda_i}} = \frac{Z_n}{N_n}\, \Pi\, (x_1 - e_i x_2)^{\bar{\lambda}_i} + \int \frac{W_{r-2}^{(n)}.(x_1\, dx_2)}{N_n^2 . \Pi\, (x_1 - e_i x_2)^{1-\lambda_i'}},$$

wo $\bar{\lambda}_i$ den algebraisch kleineren der Werte λ_i und λ_i' bedeutet. Mit Hülfe derselben kann man folgenden Satz beweisen:

PROP. XXIV.—*Wenn in irgend einem Segmente $e_i e_{i+1}$ zwei Wurzeln von $N_n = 0$ durch eine gerade Anzahl seiner ganzzahligen Punkte getrennt werden, so ist eine ungerade Anzahl von Wurzeln von $Z_n = 0$ zwischen ihnen eingeschlossen; wenn sie durch eine ungerade Anzahl getrennt werden, dann liegt zwischen ihnen keine oder eine gerade Anzahl von Wurzeln von $Z_n = 0$.*

Der Beweis läuft dem des letzteren Satzes parallel, nur dass an Stelle des benachbarten N_n (d. h. V) hier Z_n tritt.

Der hypergeometrische Fall $r = 2$, bei dem keine Wendepunkte vorhanden sind, verdient wieder besonderes Interesse. In den Kettenbrüchen von Typus I, II, IV übertrifft der Grad von Z_n niemals den von dem entsprechenden V. Wenn daher alle Wurzeln von $V = 0$ reell sind und alle oder alle ausser einer in einem einzelnen Segmente liegen, so müssen die Wurzeln von $Z_n = 0$ alle ebenfalls reell sein und abwechselnd mit ihnen liegen.

(B). *Realität und Lage der Wurzeln des einzelnen Polynoms.*

Wir werden zuerst eine Grenze für die Anzahl der imaginären Wurzeln eines Polynoms suchen. Für jedes Paar imaginärer Wurzeln muss ein Blatt, d. h. ein Ebenenteil des entsprechenden Polygons existieren, der durch das Unendliche zieht. In jedem dieser Blätter können wir eine geschlossene, convexe, geradlinige Contour ziehen, ausserhalb deren kein Teil der Polygongrenze und kein innerer Windungspunkt sich findet; wir werden sie ausserdem noch so wählen, dass ihre Ecken entweder einfache Windungspunkte oder einfache Wendepunkte (vgl. S. 56) oder Polygonecken sind. Im Falle die geradlinige Contour sich auf eine einzelne Linie reduciert—auf einen Punkt kann sie sich nicht reducieren—können wir sie als ein unendlich schmales Rechteck ansehen.

Die Summe der Ueberschüsse der Aussenwinkel unserer Contour über π beträgt 2π, und die Aussenwinkel an denjenigen Ecken, die keine inneren Windungspunkte sind, sind direct Teile der Polygonwinkel. Offenbar kann auch der Ueberschuss eines solchen Contourwinkels über π niemals π überschreiten. Wenn die Contour sich auf eine Linie reduciert und *nur* an ihren Enden Contourecken liegen, so wird dies Maximum erreicht, und die ganze Ebene liegt diagonal angehängt zwischen den beiden Endpunkten und kann also entfernt werden. Anderenfalls liegen drei oder mehr Ecken auf der Contour. Wir können noch weiter hinzufügen, dass kein einfacher innerer Windungspunkt zu mehr als zwei Contouren gehören kann und deshalb zu dem Gesamtüberschuss der Contourwinkel über π niemals mehr als 2π beitragen kann. Ausserdem kann kein einfacher Wendepunkt mehr als einem Blatt angehören, wenn nicht die Contour eine Gerade ist.

Diese Principien werden uns in den Stand setzen, für irgend ein Polygon mit einer beliebiger Anzahl von Windungs- und Wendepunkten und mit gegebenen λ' sogleich eine Grenze für die Anzahl imaginärer Wurzeln anzugeben. Wir werden die Principien auf Heun's und Humbert's Kettenbrüche vom ersten Typus

$$\int \frac{W_{r-2} \cdot dx}{(x-e_1)^{1-\lambda_1} \dots (x-e_r)^{1-\lambda_r}} = \frac{Z_n}{N_n} (x-e_1)^{\lambda_1} \dots (x-e_r)^{\lambda_r} + \int \frac{W_{r-2}^{(n)} \cdot dx}{N_n^2 \cdot (x-e_1)^{1-\lambda_1} \dots (x-e_r)^{1-\lambda_r}}$$

anwenden, wo alle Exponenten ausser λ'_{r+1} algebraisch kleiner als 1 sind. In den successiven Polygonen ist, abgesehen von Wendepunkten, der Winkel bei E_{r+1} (entsprechend $e_{r+1} = \infty$) der einzige, welcher zu einer Contour gehören kann. Nach unseren früheren Auseinandersetzungen werden wir nun zunächst alle zwischen E_{r+1} und einem Windungspunkt oder zwischen zwei Windungspunkten diagonal angehängten Vollebenen entfernen. Jeder solcherweise entfernten Ebene muss mindestens ein unterschiedenes Paar ganzzahliger Punkte ρ entsprechen. In jedem der übrigbleibenden Blätter können, abgesehen von E_{r+1}, nur Windungs- und Wendepunkte auf der Contour liegen, und es müssen wenigstens zwei solche auf jeder Contour liegen. Einem Wendepunkt entspricht ein einzelnes ρ, einem Windungspunkte ein Paar. Da indessen ein Windungspunkt zwei Contouren angehören kann, so werden wir, wenn dies eintritt, ein ρ des Paares zur einen Con-

tour, das andere zur anderen Contour rechnen. Jedes durch das Unendliche gehende Blatt verlangt deshalb mindestens zwei verschiedene ρ. Dasselbe gilt auch, wenn die Contour sich auf eine Gerade mit drei oder mehr Ecken reduciert. Die dann eintretenden Modificationen sind ganz unwesentlich, und wir haben ihre Auseinandersetzung deshalb durchweg übersprungen. Diese Uberlegungen liefern uns den Satz:

PROP. XXV.—*In keinem Integral oder Kettenbruch vom ersten Typus, in dem alle λ' ausser einem algebraisch kleiner als 1 sind, kann die Zahl der imaginären Wurzeln irgend eines Polynoms V oder N_n die Anzahl der ganzzahligen Punkte ρ, und darum $r-2$ überschreiten. Ist r ungerade, so kann sie sogar die Zahl $r-3$ nicht übertreffen.*

Dies Theorem schliesst als specielle Fälle alle früher bekannten Resultate über die Anzahl der imaginären Wurzeln für $r > 2$ ein und reicht noch weiter. So ist Humbert's und Stieltjes' Resultat, welches wir im Kap. II citierten, der specielle Fall, wo eine möglichst hohe Irregularität beim Integral auftritt, so dass alle ganzzahligen Punkte ρ fehlen. Zufolge dessen sind die Wurzeln des entsprechenden Polynoms, z. B. eines Lamé'schen Polynoms, notwendig alle reell. Ferner erkennen wir die Richtigkeit von Markoff's Satz (Kap. II), dass für $r=3$ die Polynome der Kettenbrüche keine imaginären Wurzeln besitzen. Unser Theorem kann in der That als eine Erweiterung von Markoff's Theorem für irgend einen Wert von r aufgefasst werden.

Wir wenden uns jetzt zur Erweiterung derjenigen Markoff'schen Sätze für $r=3$, die die Zahl der ausserhalb der äussersten endlichen Verzweigungspunkte e_1 und e_r liegenden reellen Wurzeln der Polynome N in Humbert's und Heun's Kettenbrüchen betreffen.

Setzen wir zunächst voraus, dass eine einzelne Wurzel eines N zwischen e_r und $e_{r+1} = \infty$ liegt. Dann geht die Seite E_rE_{r+1} des entsprechenden Polygons durch das Unendliche. An der einen oder anderen Seite dieser Linie liegt innerhalb des Polygons eine Halbebene oder ein Teil einer solchen, welche von der Linie teilweise begrenzt wird. Im Innern derselben werden wir jetzt von E_r nach E_{r+1} einen geradlinigen Linienzug ziehen, der nach dem Innern der Halbebene durchaus convex ist und dessen Ecken entweder Windungs- oder Wendepunkte oder Polygonecken sind. Ausserhalb der Contour in der Halbebene endlich soll kein Windungspunkt und kein Teil der Polygonbegrenzung liegen. Dieser Linienzug

muss, da der Winkel E_r kleiner als π ist, mindestens noch eine Ecke ausser E_r und E_{r+1} haben (vgl. Fig. 28). Hier muss der Winkel grösser als π sein, und die Ecke muss deshalb, da $\lambda_1, \ldots . \lambda_r$ alle kleiner als 1 sind, ein Wende- oder ein Windungspunkt sein. Es tritt daher entsprechend dem Umstande, dass sich die Seite in's Unendliche erstreckt, wenigstens ein ganzzahliger Punkt auf. Setzen wir zweitens mehr als zwei Wurzeln in dem Segment $e_r e_{r+1}$ voraus, und betrachten wir ein Paar successiver Wurzeln, die nicht durch einen ganzzahligen Punkt getrennt sind. Ein Teil der Seite $E_r E_{r+1}$ muss dann entsprechend von dem Unendlichen nach dem Unendlichen durch die ganze Ebene ziehen und eine Halbebene begrenzen. Durch eine reelle lineare Substitution projicieren

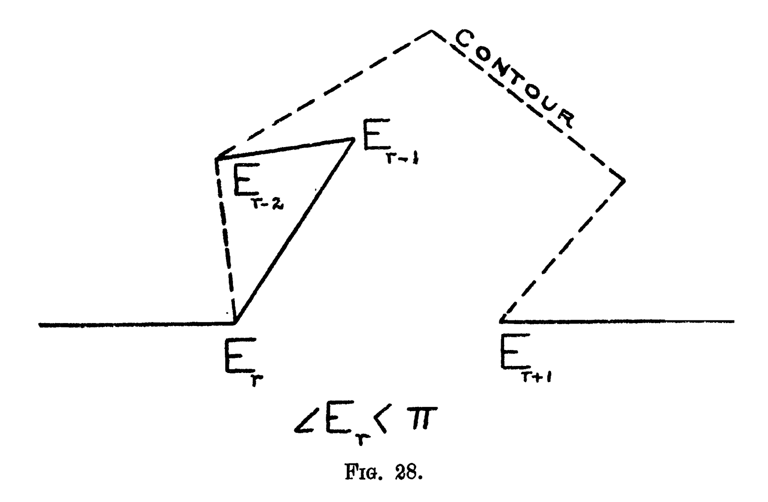


Fig. 28.

wir den Unendlichkeitspunkt in's Endliche, um die Verhältnisse besser übersehen zu können. Es liegt dann dieselbe Halbebene vor uns, nur dass die begrenzende Teilseite sich jetzt bei einem endlichen Punkte statt beim Unendlichen überschlägt. Von diesem Punkte aus zeichnen wir genau wie früher eine convexe geradlinige Contour nach demselben Punkt zurück und folgern daraus sofort, dass deren Ecken Windungspunkte sind oder der Polygongrenze angehören. Auf dieser Contour müssen nun wenigstens zwei Wende- oder ein Windungspunkt erscheinen. Daher verlangt die Existenz der zwei Wurzeln das Vorhandensein von wenigstens zwei ganzzahligen Punkten. Ferner haben wir noch die Annahme zu erledigen, dass die beiden successiven Wurzeln durch einen ganzzahligen Punkt getrennt sind. In dem Polygon laufen dann zwei Linien von dem ent-

sprechenden Wendepunkte T aus in derselben Richtung nach dem Unendlichen und kehren in derselben Ebene von der anderen Seite zurück (Fig. 29). Jede begrenzt eine Halbebene oder einen Teil einer Halbebene, welche infolgedessen, wie bei unserer ersten Annahme, für sich betrachtet werden kann. Zwischen T und der nächsten im Endlichen gelegenen Ecke ziehen wir, wie oben zwischen E_r und E_{r+1}, eine Contour, die convex gegen das Innere der betrachteten Halbebene ist, u. s. w. und schliessen, dass ausser T wenigstens noch ein Wende- oder Windungspunkt vorhanden sein muss oder, mit anderen Worten, im Ganzen für die zwei Halbebenen wenigstens 2ρ. Sind schliesslich die beiden Wurzeln durch zwei oder mehr Wendepunkte getrennt, dann bedingen sie dementsprechend von vornherein

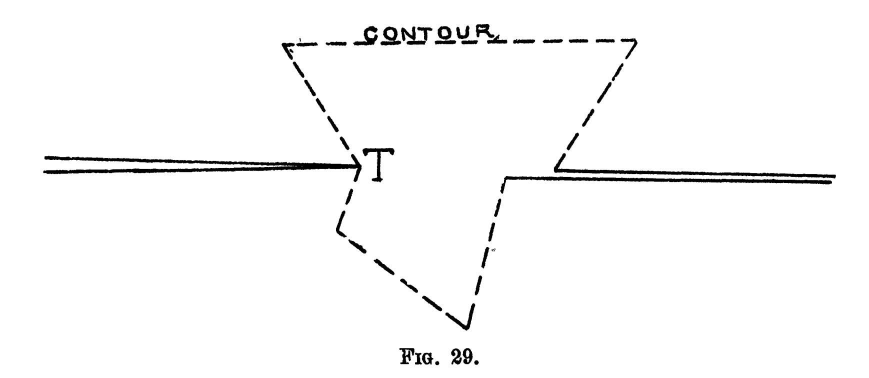


FIG. 29.

das Vorhandensein von zwei oder mehreren ganzzahligen Punkten ρ. Wir haben so durch die Construction des Polygons gelernt, dass jede Wurzel, die ausserhalb der äussersten endlichen Verzweigungspunkte liegt, die Existenz mindestens eines ρ bedingt. Daher haben wir

PROP. XXVI.—*Die Anzahl der ausserhalb der äussersten endlichen Verzweigungspunkte gelegenen reellen Wurzeln in dem Kettenbruche von Prop. XXV kann nie die Zahl der ganzzahligen Punkte, und darum niemals $r - 2$ übersteigen.*

Markoff's Satz galt, wie wir schon bemerkten, nur für den Fall $r = 3$.

Die letzten beiden Theoreme können combiniert werden, wenn man beachtet, dass Wende- oder Windungspunkte, die gebraucht werden, um einem Blatte des Polygons den Durchgang durch das Unendliche zu ermöglichen, nicht zu gleicher Zeit dazu dienen können, eine Seite durch das Unendliche sich erstrecken zu lassen. Man schliesst daraus:

PROP. XXVII.—*In dem Kettenbruch von Prop. XXV kann die Anzahl der imaginären Wurzeln, vermehrt um die Anzahl der ausserhalb der äussersten endlichen Verzweigungspunkte gelegenen reellen Wurzeln, nie die Anzahl der ganzzahligen Punkte und darum* $r - 2$ *niemals übersteigen.*

Wenden wir diesen Satz auf die verallgemeinerten Lamé'schen und Stieltjes'-schen Polynome an, so schliessen wir ohne Weiteres das im Kap. II erwähnte Resultat, dass *alle* Wurzeln dieser Polynome reell zwischen den zwei äussersten endlichen Verzweigungspunkten liegen.

GÖTTINGEN, 1893.